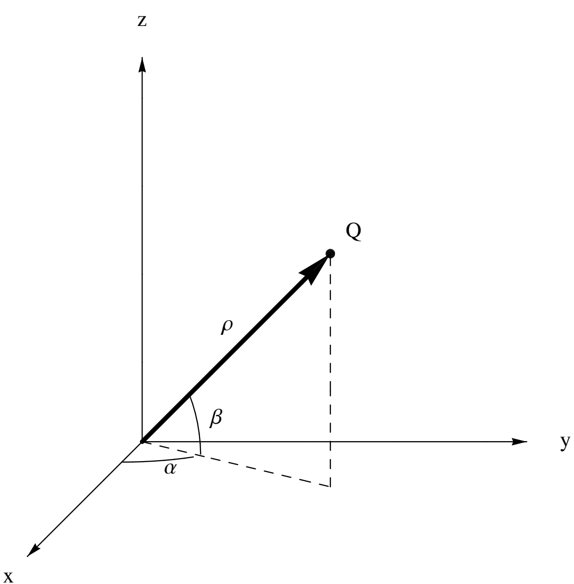
Lösung - Serie 17

1. Das Volumenelement der Koordinaten, welche in der untenstehenden Abbildung definiert sind, ist gegeben durch



√ (a) $\rho^2 \cos\beta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$.

(b) $\rho \cos\alpha \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$.

(c) $\rho^2 \sin\beta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$.

(d) $\rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$.

(e) $\rho \sin\beta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta$.

Die kartesischen Koordinaten werden wie folgt durch die Koordinaten (ρ, β, α) ausgedrückt

$$x = \rho\cos\alpha\cos\beta, \quad y = \rho\sin\alpha\cos\beta \quad \text{und} \quad z = \rho\sin\beta,$$

wobei $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \alpha < 2\pi$ und $-\pi/2 \le \beta \le \pi/2$. Das Volumenelement ergibt sich dann aus $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |\det(J)|\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$ mit

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\alpha,\beta)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & -r\sin(\alpha)\cos(\beta) & -r\cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) & r\cos(\alpha)\cos(\beta) & -r\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & 0 & r\cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow |\det(J)| = \rho^2\cos\beta$$

Also ist (a) die richtige Antwort.

Bitte wenden!

2. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erklärt durch die Vorschrift

$$(x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Es sei $J(x,y)$ die Jacobimatrix der Funktion f an der Stelle (x,y). Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\det J(x,y) = 1$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\det J(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\surd$ (c) $\det J(x,y) = 0$ genau dann, wenn $(x,y) = (0,0)$.

(d) $\det J(x,y) = 16$ auf der Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Die Aussage $c)$ ist die richtige, denn

$$\det J(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2).$$

3. Sei T ein Tetraeder mit Eckpunkten $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.
Berechnen Sie das Integral

$$\int\int\int_T f(x,y,z)dV,$$

mit $f(x,y,z) = x + y$.

(a) $\frac{4}{3}$

$\surd$ (b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$

Es gilt:

$$\int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} (x+y)dzdydx = \int_0^1 \int_0^{2-2x} [(x+y)z]_{z=0}^{z=3-3x-\frac{3}{2}y} dydx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x+y)(3-3x-\frac{3}{2}y)dydx = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (3x - 3x^2 - \frac{9}{2}xy + 3y - \frac{3}{2}y^2)dydx =$$

$$= \int_0^1 [(3x-3x^2)y + (3 - \frac{9}{2}x)\frac{y^2}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{y^3}{3}]_{y=0}^{y=2-2x} dx =$$

$$= \int_0^1 [(3x-3x^2)(2-2x) + (3-\frac{9}{2}x)\frac{(2-2x)^2}{2} - \frac{(2-2x)^3}{3}]dx =$$

$$= \int_0^1 (6 - 15x + 12x^2 - 3x^3 - 4(1-x)^3)dx = [6x - 15\frac{x^2}{2} + 4x^3 - 3\frac{x^4}{4} + (1-x)^4]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Siehe nächstes Blatt!

4. Gegeben ist ein Zylinder Z (Dichte 1) mit Radius R und Höhe h der senkrecht auf der xy-Ebene steht. Welches der folgenden Integrale in Zylinderkoordinaten beschreibt das Trägheitsmoment Θ des Zylinders Z bezüglich der z-Achse?

(a) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r\, dz\, dr\, d\varphi$

(b) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^2\, dz\, dr\, d\varphi$

√ (c) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^3\, dz\, dr\, d\varphi$

(d) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^4\, dz\, dr\, d\varphi$

Das Trägheitsmoment bei konstanter Massendichte 1 ist das Integral $\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$. In Zylinderkoordinaten transformiert es sich zu

$$\int r^2 \cdot r\, dz\, dr\, d\varphi$$

über $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $z \in [0, h]$ sowie $r \in [0, R]$.

5. Das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale mit Radius R und konstanter Flächendichte bezüglich einer Achse durch den Mittelpunkt ist proportional zu

(a) R^2.

(b) R^3.

√ (c) R^4.

(d) $R^{9/2}$.

(e) R^5.

Das Trägheitsmoment bei konstanter Flächendichte $m\Delta R$ (mit m die Massendichte und ΔR die Dicke der Kugelschale) ist das Integral

$$\int m \cdot (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.$$

In Kugelkoordinaten transformiert es sich zu

$$\int m \cdot r^2 \cos^2\theta \cdot r^2 \cos\theta\, d\varphi\, d\theta\, dr,$$

wobei über $\varphi \in [-\pi, \pi]$ und $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ sowie $r \in [R - \Delta R, R]$ integriert wird. Die inneren beiden Integrale über φ und θ liefern lediglich einen konstanten Faktor. Das verbleibende Integral $\int_{R-\Delta R}^{R} mr^4\, dr$ ist $\approx mR^4\Delta R$, also ist (c) richtig.

Aliter: Wir wissen bereits, dass das Trägheitsmoment einer Vollkugel mit Radius R proportional zu R^5 ist. Das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale mit äusserem Radius R und Schalendicke ΔR ist folglich proportional zu $R^5 - (R - \Delta R)^5 = R^4 \cdot \Delta R$ + vernachlässigbare kleinere Terme. Also ist (c) die richtige Antwort.

Bitte wenden!

6. Berechnen Sie den Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix für folgende Koordinatentransformationen.

a) Von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten.

b) Von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten.

c) Von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.

Was fällt Ihnen auf?

Lösung:

a) Die Zylinderkoordinaten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos(\varphi) \\ y &= \varrho\sin(\varphi) \\ z &= z, \end{aligned}$$

wobei $0 \leq \varrho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $z \in \mathbb{R}$. Die Jacobi-Matrix J_1 ist dann

$$J_1 = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\varrho\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \varrho\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Der Betrag der Jacobi-Matrix ist somit

$$|\det(J_1)| = \varrho\left(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\right) = \varrho.$$

b) Die Kugelkoordianten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi)\sin(\vartheta) \\ y &= r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) \\ z &= r\cos(\vartheta), \end{aligned}$$

wobei $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Die Jacobi-Matrix J_2 ist

$$J_2 = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\vartheta) & -r\sin(\varphi)\sin(\vartheta) & r\cos(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \sin(\varphi)\sin(\vartheta) & r\cos(\varphi)\sin(\vartheta) & r\sin(\varphi)\cos(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) & 0 & -r\sin(\vartheta) \end{pmatrix},$$

und der Betrag deren Determinante ist

$$\begin{aligned} |\det(J_2)| &= r^2\cos(\varphi)^2\sin(\vartheta)^3 + r^2\sin(\varphi)^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)^2 \\ &\quad + r^2\sin(\varphi)^2\sin(\vartheta)^3 + r^2\cos(\varphi)^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)^2 \\ &= r^2\sin(\vartheta)\left(\cos(\varphi)^2\sin(\vartheta)^2 + \sin(\varphi)^2\cos(\vartheta)^2\right. \\ &\quad \left. + \sin(\varphi)^2\sin(\vartheta)^2 + \cos(\varphi)^2\cos(\vartheta)^2\right) \\ &= r^2\sin(\vartheta)\left(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2\right)\left(\cos(\vartheta)^2 + \sin(\vartheta)^2\right) \\ &= r^2\sin(\vartheta). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

c) Die Transformationsgleichungen von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten lauten

$$
\begin{aligned}
r(x,y,z) &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\varphi(x,y,z) &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + k\pi \qquad \text{wobei} \begin{cases} k = 0 & \text{für } x > 0, y \geq 0 \\ k = 1 & \text{für } x < 0 \\ k = 2 & \text{für } x > 0, y < 0 \end{cases} \\
\theta(x,y,z) &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \qquad \text{für } \sqrt{x^2+y^2} \neq 0.
\end{aligned}
$$

Daraus kann man die Jacobi-Matrix $J_3 = \dfrac{\partial(r,\varphi,\theta)}{\partial(x,y,z)}$ berechnen.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{(analog für } y \text{ und } z\text{)} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \\
\frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{-1}{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}}\frac{-zx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{(analog für } y\text{)} \\
\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{-1}{1+\frac{z^2}{x^2+y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow J_3 = \frac{\partial(r,\varphi,\theta)}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix}
$$

Die Jacobi-Determinante ist dann

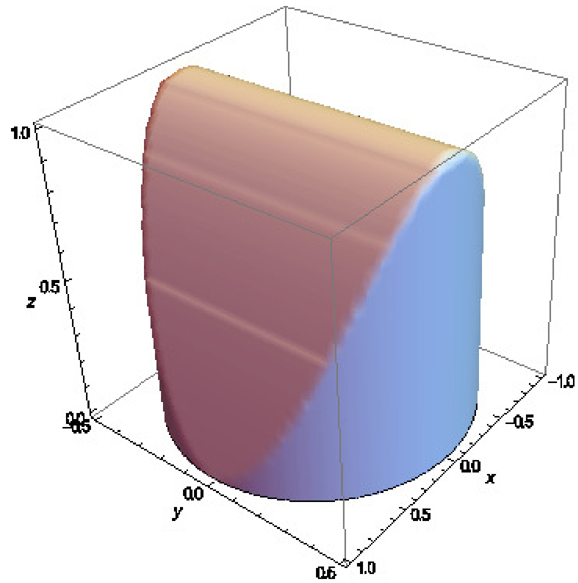
$$
\begin{aligned}
\det(J_3) &= \frac{-x^2\left(x^2+y^2\right) - y^2z^2 - y^2\left(x^2+y^2\right) - x^2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \\
&= -\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2\right) + \left(x^2+y^2\right)z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}
$$

Daraus sieht man, dass

$$
|\det(J_3)| = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r^2\sin(\theta)} = \frac{1}{|\det(J_2)|}.
$$

7. Berechnen Sie das oberhalb der Ellipse $x^2+4y^2 \leq 1$ und unterhalb der Fläche $z = 1 - x^2$ liegende Volumen.

Bitte wenden!



Hinweis: Finden Sie Koordinaten in der xy-Ebene in denen die Ellipse eine besonders einfache Form hat.

Lösung: Das Volumen erhält man durch Integration von $f(x,y) = 1 - x^2$ über die Fläche $A \subset \mathbb{R}^2$, die durch die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$ begrenzt ist:

$$V = \iint_A f(x,y)\, dxdy.$$

Mit folgendem Koordinatenwechsel $(x,y) \to (s,\varphi)$

$$\begin{aligned} x &= s\cos(\varphi) \\ y &= \frac{s}{2}\sin(\varphi) \end{aligned}$$

vereinfachen wir das Problem. Die Ellipse ist nun durch die Gleichung $s = 1$ gegeben. Die Funktion f ist gegeben durch $f(s,\varphi) = 1 - s^2\cos^2(\varphi)$.
Mit Hilfe der Jacobideterminante findet man: $dxdy = \frac{s}{2} ds d\varphi$.
So wird das Integral zu

$$\begin{aligned} \iint_A f(x,y)\, dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(s,\varphi)\frac{s}{2} d\varphi ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(s - s^3\cos^2(\varphi)\right) d\varphi ds \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2\pi s - \pi s^3\right) ds \\ &= \frac{\pi}{2}\left(s^2 - \frac{s^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

8. Ein gerader Kreiszylinder mit Radius R, $(x^2+y^2 \leq R^2)$, und Höhe H, $(0 \leq z \leq H)$, habe eine Dichte von $\rho(x,y,z) = 1 + x^2 + y^2 + z$. Berechnen Sie die Masse und das Trägheitsmoment bei Rotation um die z-Achse.

Siehe nächstes Blatt!

Lösung: In Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\varphi) \\ y &= r\sin(\varphi) \\ z &= z \end{aligned}$$

ist das Gebiet gegeben durch

$$r \in [0,\ R],\ \varphi \in [0,\ 2\pi],\ z \in [0,\ H].$$

Die Jacobideterminante beträgt r, die Dichte $\rho = 1 + r^2 + z$.

Die Masse ist gegeben durch

$$\iiint_V \rho dV.$$

also berechnen wir sie zu

$$\begin{aligned} &\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (1 + r^2 + z) r dr d\varphi dz = 2\pi \int_0^H \int_0^R (1 + r^2 + z) r dr dz \\ = &\ 2\pi\Big(\int_0^H \int_0^R r dr dz + \int_0^H \int_0^R r^3 dr dz + \int_0^H \int_0^R z r dr dz \Big) \\ = &\ 2\pi\Big(\frac{HR^2}{2} + \frac{HR^4}{4} + \frac{H^2R^2}{4} \Big) = \frac{\pi HR^2}{2}(2 + R^2 + H). \end{aligned}$$

Das Trägheitmoment ist gegeben durch

$$\iiint_V \rho(x^2 + y^2) dV.$$

Mit $\sqrt{x^2 + y^2} = r,\ dV = r dr d\varphi dz$ lautet das Trägheitsmoment in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} &\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R (1 + r^2 + z) r^2 r dr d\varphi dz = 2\pi \int_0^H \int_0^R (1 + r^2 + z) r^2 r dr dz \\ = &\ 2\pi\Big(\int_0^H \int_0^R r^3 dr dz + \int_0^H \int_0^R r^5 dr dz + \int_0^H \int_0^R z r^3 dr dz \Big) \\ = &\ 2\pi\Big(\frac{HR^4}{4} + \frac{HR^6}{6} + \frac{H^2R^4}{8} \Big) = \frac{\pi HR^4}{12}(6 + 4R^2 + 3H). \end{aligned}$$

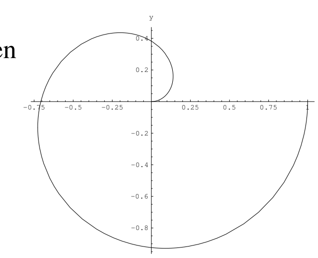
9. In der xy-Ebene werde der Bereich B durch die Strecke von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ und dem Kurvenbogen mit der Polardarstellung $\rho = \sin(\frac{\varphi}{4}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi$ begrenzt. Berechnen Sie das Volumen des über dem Bereich B liegenden Teils der Einheitskugel

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}.$$

Lösung: Zur Berechnung eignen sich am besten Polarkoordinaten (ρ, φ).

$$B = \{(\rho, \varphi) : 0 \le \rho \le \sin(\frac{\varphi}{4}),\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$$

$V = \int_B \sqrt{1 - \rho^2}\, dF$ mit $dF = \rho\, d\rho\, d\varphi$.



Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sin(\varphi/4)} \sqrt{1-\rho^2}\rho \, d\rho \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2}\frac{2}{3}(1-\rho^2)^{3/2} \right]_0^{\sin(\varphi/4)} d\varphi \\
&= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^3(\frac{\varphi}{4}) - 1 \, d\varphi = -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\cos(\frac{3\varphi}{4}) + \frac{3}{4}\cos(\frac{\varphi}{4}) - 1 \, d\varphi \\
&= -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}\sin(\frac{3\varphi}{4}) + 3\sin(\frac{\varphi}{4}) - \varphi \right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{3}(-\frac{1}{3} + 3 - 2\pi) = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}
\end{aligned}
$$