# Lösung - Serie 24

**1.** Gegeben seien Funktionen $s,\, t:\, \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Welche aus den folgenden Bedingungen garantieren die Exaktheit der Differenzialgleichung $s(x,y) = t(x,y) \cdot y'$?

(a) Für alle $(x,y)$: $s_y(x,y) = t_x(x,y)$.

(b) Für alle $(x,y)$: $s_x(x,y) = t_y(x,y)$.

√ (c) Für alle $(x,y)$: $s_y(x,y) = -t_x(x,y)$.

(d) Für alle $(x,y)$: $s_x(x,y) = -\frac{1}{t_y(x,y)}$.

(e) Keine.

Weil $s$ und $t$ einen einfach zusammenhängenden Definitionsbereich haben (nämlich das ganze $\mathbb{R}^2$), ist $s(x,y) - t(x,y) \cdot y' = 0$ genau dann exakt, wenn $s_y(x,y) = -t_x(x,y)$ (vgl. Stammbach, Analysis, Kap. VII.6).

**2.** Welche aus den folgenden Gleichungen sind exakt?

(a) $e^x \sin y + 3y - (3x - e^x \sin y)y' = 0$.

√ (b) $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\log x - 2)y' = 0$, $x > 0$.

(c) $(y \log x + xy)y' = -x \log y - xy$.

√ (d) $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}$, $a, b, c, d > 0$ Konstante.

Eine Differentialgleichung ist exakt, wenn sie der Form $\varphi(x,y) + \psi(x,y)y' = 0$ ist, wobei $\varphi_y = \psi_x$. Die Differentialgleichungen in (b) und (d) können in dieser Form geschrieben werden, (a) und (c) hingegen nicht.

**3.** Welche Aussagen über die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$x^2 + Cy^2 = 1$$

mit Scharparameter $C$ sind korrekt?

√ (a) Die $y$–Achse ist eine Orthogonaltrajektorie.

√ (b) Alle Orthogonaltrajektorien, welche den Punkt $(0,0)$ nicht treffen, sind geschlossene Kurven.

(c) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln|x| = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

√ (d) Die Kurven der Form $y^2 + x^2 - \ln(x^2) = K$ mit $K \geq 1$ sind Orthogonaltrajektorien.

Die Differenzialgleichung der Kurvenschar $x^2 + C\,y^2 = 1$ erhält man durch Elimination des Scharparameters $C$. Durch totale Ableitung nach $x$ erhält man $2\,x + C\,2\,yy' = 0$. $C = \frac{1-x^2}{y^2}$ $(y \neq 0)$ eingesetzt liefert

$$2x + \frac{1-x^2}{y^2} 2yy' = 0. \tag{1}$$

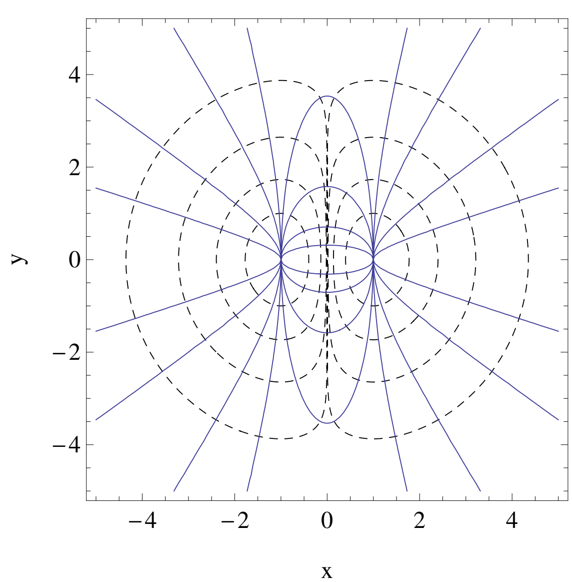
Falls $x = 0$, dann ist $y' = 0$ für alle $y$. D.h. die $y$–Achse ist eine Orthogonaltrajektorie, und somit ist (a) richtig. Die Differenzialgleichung der Orthogonaltrajektorien finden wir, indem wir in (1) die Ableitung $y'$ durch $-1/y'$ ersetzen (siehe Stammbach–Skript, Teil C, Kapitel VII, Seite 52), also

$$yy' = \frac{1-x^2}{x}, \quad x \neq 0.$$

Integrieren liefert

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + \frac{K}{2} \quad \text{oder} \quad y^2 + \underbrace{x^2 - \ln(x^2)}_{\geq 1} = K$$

mit $K \geq 1$. Da dies für alle $x \neq 0$ gilt, folgt, dass (d) richtig ist und (c) falsch ist. Diese Orthogonaletrajektorien sind sowohl bezüglich der $x$–Achse als auch bezüglich der $y$–Achse symmetrisch. Sie befinden sich für ein gegebenes $K$ in einem beschränkten Bereich auf der $xy$–Ebene, wie man in der folgenden Abbildung sehen kann.




**Siehe nächstes Blatt!**

Die blauen Linien sind die Kurven der gegebenen Kurvenschar und die gestrichelten Linien sind deren Orthogonaltrajektorien. Diese Kurven sind geschlossen und damit ist (b) richtig. Die korrekte Antwort lautet also (c).

**4.** Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei das Potential eines Vektorfelds $\vec{v} = \operatorname{grad} g$. In welcher Beziehung stehen die Niveaulinien von $g$ mit den Feldlinien von $\vec{v}$?

(a) Die Niveaulinien von $g$ und die Feldlinien von $\vec{v}$ sind (abgesehen von der Orientierung) gleich.

$\surd$ (b) Die Niveaulinen von $g$ und die Feldlinien von $\vec{v}$ sind Orthogonaltrajektorien voneinander.

(c) Es gibt keinen Zusammenhang dieser Art.

Nach Definition stehen die Feldlinien von $\vec{v}$ tangential zu $\vec{v}$ in jedem Punkt. Anderseits steht $\vec{v} = \operatorname{grad} g$ in jedem Punkt senkrecht zu den Niveaulinien von $g$. Also verlaufen die Feldlinien von $\operatorname{grad} g$ senkrecht zu den Niveaulinien von $g$ und (b) ist die korrekte Antwort.

**Bitte wenden!**

**5.** Bestimmen Sie die Kurvenschar der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y^2 \cdot (y')^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y = y(x) > 0$$

sowie ihre Enveloppen.

***Lösung:*** Die Gleichung ist äquivalent zu $yy' = \pm\sqrt{1-y^2}$. Somit ist sie separierbar:

$$\begin{aligned} yy' = \pm\sqrt{1-y^2} \quad &\Longrightarrow \quad \int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = \pm\int \mathrm{d}x \\ &\Longleftrightarrow \quad -\sqrt{1-y^2} = \pm x + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \quad 1 - y^2 = (\pm x + C)^2 = (x \pm C)^2 \\ &\overset{y>0}{\Longleftrightarrow} \quad y(x) = \sqrt{1-(x-K)^2} \end{aligned}$$

wobei $K = \mp C$. Man kann überprüfen, dass die Kurvenschar

$$y = \sqrt{1-(x-K)^2}, \quad K \in \mathbb{R}$$

tatächlich die allgemeine Lösung der originalen Differential gleichung ist. Diese Schar beschreibt alle oberen Halbkreise mit Radius 1 und Mittelpunkt auf der $x$-Achse (ohne die Punkte auf dieser Achse).

Geometrisch kann man feststellen, das $y = 1$ eine Enveloppe der Kurvenschar und somit eine singuläre Lösung der Differentialgleichung ist. Dies lässt sich auch analytisch zeigen: Wenn man $F(x, y, K) := (x-K)^2 + y^2 - 1$ definiert, müssen die Enveloppen die Gleichungen

$$(x-K)^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad F_K(x, y, K) = -2(x-K) = 0$$

erfüllen. Hier müssen wir nun den Scharparameter $K$ eliminieren. Aus der zweiten Gleichung folgt $x = K$ und aus der ersten somit, dass $y = 1$ ist. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung lässt sich überprüfen, dass diese konstante Funktion tatsächlich eine Lösung ist.

**6.** Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$\frac{y-1}{x-1} = C.$$

Skizzieren Sie diese Trajektorien.

***Lösung:***

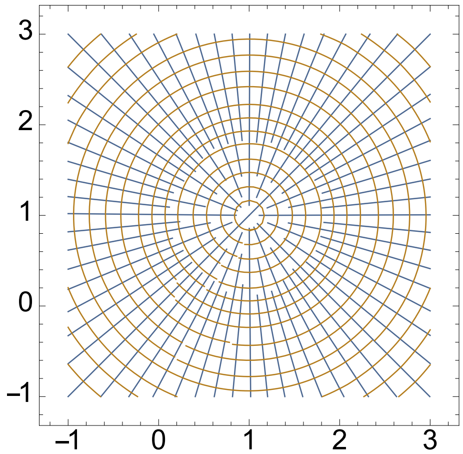
Nach Ableiten erhält man $\frac{y'(x-1)-(y-1)}{(x-1)^2} = 0$. Somit ist $y' = \frac{y-1}{x-1}$ die Differentialgleichung der Kurvenschar und entsprechend $y' = -\frac{x-1}{y-1}$ die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien. Diese ist separierbar.

Man findet als Lösung

$$\begin{aligned} dy(y-1) &= -dx(x-1) \\ \int (y-1)dy &= -\int (x-1)dx \\ \frac{1}{2}y^2 - y &= -(\frac{1}{2}x^2 - x) + C_1 \\ \frac{1}{2}y^2 - y + \frac{1}{2}x^2 - x &= C_1 \\ (y-1)^2 + (x-1)^2 &= C \end{aligned}$$

Die Orthogonaltrajektorien sind also Kreise mit Zentrum $(1, 1)$.

**Siehe nächstes Blatt!**




**7.** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y - xy' = \sqrt{(y')^2 + 1}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine und die singuläre Lösung. Welche geometrische Form hat die Enveloppe der Lösungsschar?

***Lösung:***

Die Differentialgleichung $y - xy' = \sqrt{(y')^2 + 1}$ ist eine Clairaut'sche Differentialgleichung (vgl. Stammbach, Kapitel VII.7). Die allgemeine Lösung ist die Schar von Geraden

$$y(x) = Cx + \sqrt{C^2 + 1}.$$

Die Singuläre Lösung ist die Enveloppe der Schar und hat Parameterdarstellung

$$x(C) = \frac{-C}{\sqrt{C^2 + 1}}$$
$$y(C) = \frac{1}{\sqrt{C^2 + 1}}.$$

Wir eliminieren das Parameter $C$:

$$x^2 + y^2 = \frac{C^2}{C^2 + 1} + \frac{1}{C^2 + 1} = 1,$$

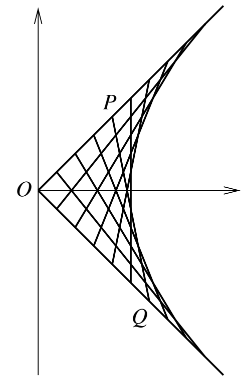
Aus der Parameterdarstellung der Enveloppe sehen wir, dass die $y$-Koordinate positiv ist. Daraus folgt, dass die Enveloppe der Lösungsschar die obere hälfte des Einheitskreises ist.

**Bitte wenden!**

**8.** Seien $P$ und $Q$ Punkte auf den Winkelhalbierenden des ersten bzw. zweiten Quadranten. Berechnen Sie die Enveloppe der Schar der Geraden $\overline{PQ}$, für die die Summe der Längen

$$PO + QO = 2\sqrt{2}$$

ist. ($O$ ist der Koordinatenursprung.)




***Lösung:*** Mit $P = (p, p)$ und $Q = (q, -q)$ ergibt sich aus der Bedingung $PO+QO = 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(p+q)$ die Beziehung $q = 2 - p$. Eine Parameterdarstellung der Geraden durch $P$ und $Q$ ist gegeben durch

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} p \\ p \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q - p \\ -q - p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p + t(2 - 2p) \\ p - 2t \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man $t = \frac{p-y}{2}$ und in der ersten Gleichung eingesetzt, ergibt sich

$$x = p + \frac{p - y}{2}(2 - 2p) \quad \text{oder} \quad 0 = p - x - (p - y)(p - 1) =: F(x, y, p).$$

Aus der Enveloppenbedingung $F_p = 1 - (p - 1) - (p - y) = 0$ folgt $p = \frac{y+2}{2} = \frac{y}{2} + 1$. Einsetzen dieses Ausdruckes in der Gleichung $F(x, y, p) = 0$ führt zu

$$\frac{y}{2} + 1 - x - (1 - \frac{y}{2})\frac{y}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1.$$

Dies ist eine Parabel. Wegen $0 \leq p \leq 2$ folgt aus $p = \frac{y}{2} + 1$ noch $-2 \leq y \leq 2$. Die Enveloppe ist also der Parabelbogen

$$x = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + 1 \qquad -2 \leq y \leq 2.$$