Serie 15

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 13.03.2019 um 08:15 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Mittwoch, 13.03.2019 in der Schnellübung.

Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

(a) der minimalen partiellen Ableitung.

(b) entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

(c) des Gradienten.

(d) entgegengesetzt zum Gradienten.

(e) orthogonal zum Gradienten.

2. Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Kugeln mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

(b) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Ebenen senkrecht zum Vektor $(1, 3, 1)$.

(c) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Ellipsoiden mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

Bitte wenden!

3. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y + z^3$ an der Stelle $(1, 2, 2)$ in Richtung des Einheitsvektors $\frac{1}{3}(2, 2, 1)$.

(a) $\dfrac{34}{3}$

(b) 6

(c) $(2, 1, 12)$

(d) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 4)$

4. Die Richtungsableitung der Funktion $f : (x, y) \mapsto \arctan(x/y)$ an der Stelle $(-3, 3)$ in die Richtung des Einheitsvektors $(3/5, 4/5)$ lautet:

(a) $\frac{7}{30}$.

(b) $\frac{7}{6}$.

(c) -$\frac{21}{5}$.

(d) -$\frac{21}{25}$.

5. Bestimmen Sie jene Tangentialebenen an das Ellipsoid

$$2x^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1,$$

welche parallel zur Ebene $x + y + z = 1$ sind.

(a) $x + y + z = 0$.

(b) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\}$.

(c) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm\sqrt{5}\}$.

(d) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm 1\}$.

Siehe nächstes Blatt!

6. Finden Sie die Extremalstellen der Funktion

$$f(x,y) = \exp(3y^2 - 1 - x^2)$$

im Bereich

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 2y^2 \le 4\right\} .$$

7. Sei

a) $z(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ und $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$.

b) $z(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ und $x(t) = e^{-t}$, $y(t) = e^t$.

Berechnen Sie die Ableitung $\frac{dz}{dt}$ durch die verallgemeinerte Kettenregel. Prüfen Sie Ihr Resultat durch explizites Ableiten von $z(x(t), y(t))$ nach t.

8. Eine Funktion von drei Variablen $f : (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ besitzt im Ursprung in den drei Richtungen

$$\mathbf{a} = (1,0,0), \quad \mathbf{b} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \quad \mathbf{c} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

die Richtungsableitungen

$$D_{\mathbf{a}} f(\mathbf{0}) = 3\,, \quad D_{\mathbf{b}} f(\mathbf{0}) = -2\,, \quad D_{\mathbf{c}} f(\mathbf{0}) = 5\,.$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche von f im Ursprung.

9. Für welche Tripel von Funktionen $\phi, \psi, \chi : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \neq 0\} \to \mathbb{R}$ existiert eine Funktion f, sodass $f_x = \phi$, $f_y = \psi$ und $f_z = \chi$?

Falls f existiert, geben Sie f explizit an.

a) $\phi(x,y,z) = \frac{2x}{y}, \quad \psi(x,y,z) = 3y^2z^2 - \frac{x^2}{y^2}, \quad \chi(x,y,z) = 2y^3 z.$

b) $\phi(x,y,z) = e^y + 2xy^3z^2, \quad \psi(x,y,z) = xe^y + 3x^2y^2z^2, \quad \chi(x,y,z) = 2x^2y^3 + x.$

c) $\phi(x,y,z) = e^z y\cos(xy)\,, \quad \psi(x,y,z) = e^z x\cos(xy)\,, \quad \chi(x,y,z) = e^z \sin(xy).$

d) $\phi(x,y,z) = ze^x, \quad \psi(x,y,z) = \frac{1}{z}\sin\left(\frac{y}{z}\right), \quad \chi(x,y,z) = \frac{y}{z^2}\sin\left(\frac{y}{z}\right) + e^x.$