Serie 17

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, den 27. März 2019, um 08.15 Uhr** ab.

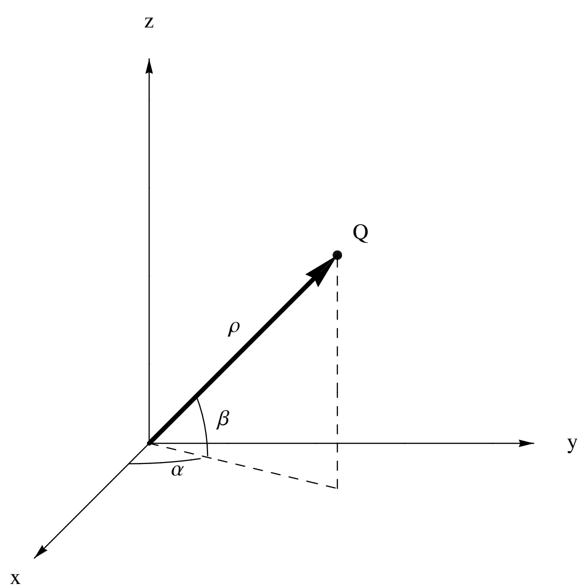
Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Mittwoch, 27. März 2019 in der Schnellübung.

Homepage der Vorlesung: https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Das Volumenelement der Koordinaten, welche in der untenstehenden Abbildung definiert sind, ist gegeben durch



(a) $\rho^2 \cos\beta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\beta$.

(b) $\rho \cos\alpha \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\beta$.

(c) $\rho^2 \sin\beta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\beta$.

(d) $\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\beta$.

(e) $\rho \sin\beta \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\alpha \,\mathrm{d}\beta$.

2. Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ erklärt durch die Vorschrift

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Es sei $J(x, y)$ die Jacobimatrix der Funktion f an der Stelle (x, y). Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

(a) $\det J(x, y) = 1$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\det J(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) $\det J(x, y) = 0$ genau dann, wenn $(x, y) = (0, 0)$.

(d) $\det J(x, y) = 16$ auf der Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3. Sei T ein Tetraeder mit Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 3)$.
Berechnen Sie das Integral

$$\int\int\int_T f(x, y, z) dV,$$

mit $f(x, y, z) = x + y$.

(a) $\frac{4}{3}$

(b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{1}{2}$

4. Gegeben ist ein Zylinder Z (Dichte 1) mit Radius R und Höhe h der senkrecht auf der xy-Ebene steht. Welches der folgenden Integrale in Zylinderkoordinaten beschreibt das Trägheitsmoment Θ des Zylinders Z bezüglich der z-Achse?

(a) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r \, dz \, dr \, d\varphi$

(b) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^2 \, dz \, dr \, d\varphi$

(c) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^3 \, dz \, dr \, d\varphi$

(d) $\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^4 \, dz \, dr \, d\varphi$

5. Das Trägheitsmoment einer dünnen Kugelschale mit Radius R und konstanter Flächendichte bezüglich einer Achse durch den Mittelpunkt ist proportional zu

(a) R^2.

(b) R^3.

(c) R^4.

(d) $R^{9/2}$.

(e) R^5.

Siehe nächstes Blatt!

6. Berechnen Sie den Betrag der Determinante der Jacobi-Matrix für folgende Koordinatentransformationen.

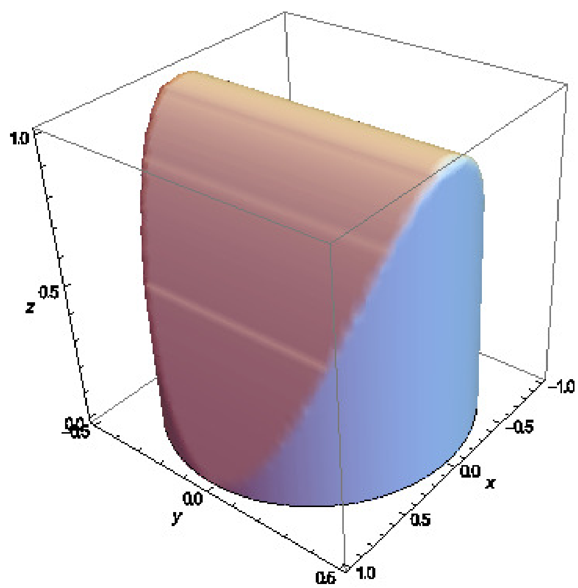
a) Von kartesischen Koordinaten in Zylinderkoordinaten.

b) Von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten.

c) Von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.

Was fällt Ihnen auf?

7. Berechnen Sie das oberhalb der Ellipse $x^2 + 4y^2 \leq 1$ und unterhalb der Fläche $z = 1 - x^2$ liegende Volumen.



Hinweis: Finden Sie Koordinaten in der xy-Ebene in denen die Ellipse eine besonders einfache Form hat.

8. Ein gerader Kreiszylinder mit Radius R, $(x^2+y^2 \leq R^2)$, und Höhe H, $(0 \leq z \leq H)$, habe eine Dichte von $\rho(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z$. Berechnen Sie die Masse und das Trägheitsmoment bei Rotation um die z-Achse.

9. In der xy-Ebene werde der Bereich B durch die Strecke von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$ und dem Kurvenbogen mit der Polardarstellung $\rho = \sin(\frac{\varphi}{4}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ begrenzt. Berechnen Sie das Volumen des über dem Bereich B liegenden Teils der Einheitskugel

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$