

## Serie 19

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, den 10. April 2019, um 08.15 Uhr** ab.

**Bemerkung:** Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

**Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben:** Mittwoch, 10. April 2019 in der Schnellübung.

---

### MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

**1.** Die Fläche  $S$  sei einerseits durch die Parameterdarstellung  $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$  und andererseits durch die Gleichung  $f(x, y, z) = 0$  gegeben. Wir betrachten einen festen Punkt  $P_0$  mit Ortsvektor  $(u_0, v_0)$  auf der Fläche  $S$ . Dann gilt: Die Vektoren  $\text{grad}(f(P_0))$  und  $\vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$

- (a) sind gleich.
- (b) sind entgegengesetzt gleich.
- (c) sind parallel.
- (d) stehen senkrecht aufeinander.
- (e) sind weder parallel noch stehen sie senkrecht aufeinander.

**2.** Es sei eine Fläche durch die Parameterdarstellung  $(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$  gegeben. Der Vektor  $\vec{n}(u, v)$  bezeichnet den Normaleneinheitsvektor zur Fläche. Es bezeichne  $P_0$  den Punkt auf der Fläche, der zu  $(u_0, v_0)$  gehört. Klicken Sie die *richtigen* Aussagen an.

- (a) Der Vektor  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  liegt in einer Tangentialebene zur Fläche im Punkte  $P_0$ .
- (b) Wenn  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  und  $\vec{r}_v(u_0, v_0)$  linear unabhängig sind, dann spannen sie die Tangentialebene zur Fläche im Punkte  $P_0$  auf.
- (c)  $\vec{n}(u_0, v_0) = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$ .
- (d) Der Vektor  $\vec{r}_u(u_0, v_0)$  ist tangential an die  $u$ -Linie, die durch  $P_0$  geht.

**Bitte wenden!**

3. Der Oberflächeninhalt des Graphs  $z = f(x, y)$  einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  ist

(a)  $\iint_D dx dy$

(b)  $\iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy$

(c)  $\iint_D |f_x(x, y) \times f_y(x, y)| dx dy$

*Hinweis:* Parametrisieren Sie die Fläche durch  $\vec{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ .

4. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{v}: (x, y, z) \mapsto (x, y^2 + z, 3x)$$

durch das Dreieck  $D$  mit Ecken  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  und  $(0, 1, 0)$  in Richtung  $\vec{n} = (0, 0, 1)$ .

(a)  $\frac{1}{2}$

(b) 3

(c)  $-\frac{1}{2}$

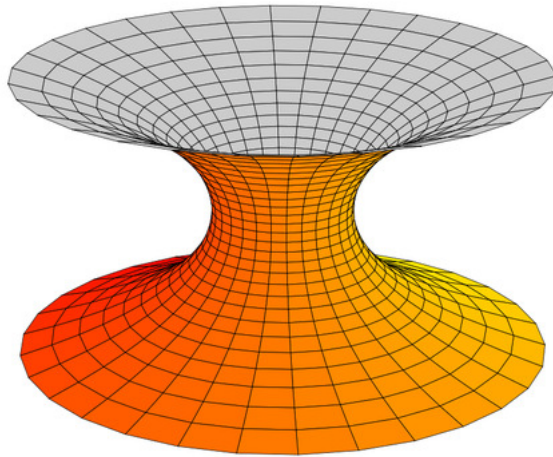
**Siehe nächstes Blatt!**

5. Eine Rotationsfläche  $M \subset \mathbb{R}^3$  sei gegeben durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(u, v) = (\cosh(v) \cos(u), \cosh(v) \sin(u), v),$$

mit  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ . Die Fläche  $M$  heisst Katenoid und ist eine sogenannte Minimalfläche. (Eine Minimalfläche einer Kurve ist eine Fläche, deren Rand gerade die Kurve ist und gleichzeitig unter solchen Flächen ein lokales Minimum im Flächeninhalt hat.)

- a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt  $A(M)$ .
- b) Verifizieren Sie, dass der Flächeninhalt eines Zylindermantels mit Radius  $\cosh 1$  und Höhe 2 grösser ist als  $A(M)$ .



6. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(x, y, z) = (1 - x, 1 - y, 1 + z)$$

sowie die Fläche  $S$  mit der Parameterdarstellung

$$(u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = (u - v, u + v, uv)$$

und dem Parameterbereich

$$B = \{(u, v) \mid 0 \leq v \leq 1, |u| \leq 1 - v\}.$$

Berechnen Sie den Fluss des Feldes  $\vec{v}$  von oben nach unten durch die Fläche  $S$ .

Visualisierungsmöglichkeit für ein rechteckiges  $B$  auf [https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/auth/nethz/geogebra/6.3\\_parametrische\\_flaeche.html](https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/auth/nethz/geogebra/6.3_parametrische_flaeche.html).

7. Gegeben sei das Vektorfeld

$$v(x, y) = (2x + y, x - y)$$

In dieser Aufgabe berechnen wir den Fluss durch die Ellipse  $x^2 + 4y^2 = 1$  nach aussen.

- a) Parametrisieren Sie die Ellipse durch eine Funktion  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ .

**Bitte wenden!**

b) Beim Punkt  $\gamma(t)$  berechnen Sie den Tangentialvektor gegeben durch die Ableitung  $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ . Finden Sie den nach aussen zeigenden Normalenvektor  $n(t)$  zur Ellipse mit gleicher Länge wie  $\dot{\gamma}(t)$ .

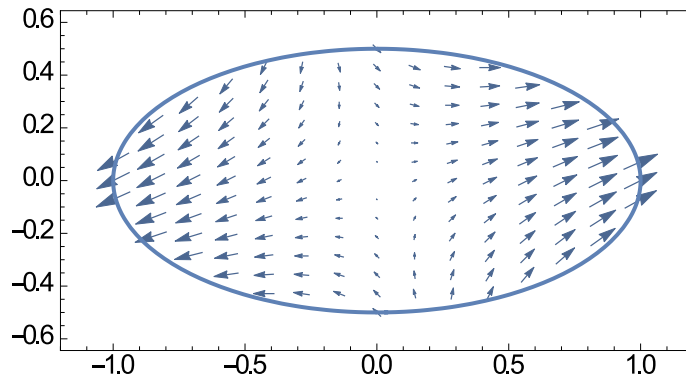
c) Berechnen Sie den Fluss von  $v$  durch die Ellipse nach aussen gegeben durch

$$\int_a^b v(\gamma(t)) \cdot n(t) dt,$$

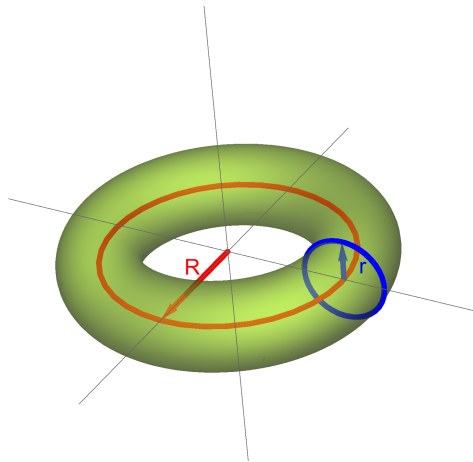
wobei wir das zweidimensionale Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

verwenden.



8. Berechnen Sie die Oberfläche eines Rotationstorus mit grossem Radius  $R$  und kleinem Radius  $r$  (siehe Abbildung).



**Siehe nächstes Blatt!**

9. Bestimmen Sie die Mantelfläche des Zylinders  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 16\}$  zwischen den Ebenen  $z = 0$  und  $z = 16 - 2x$ .

