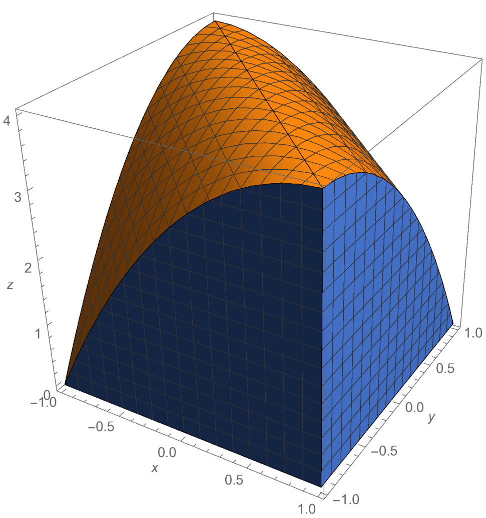
Lösung - Schnellübung 10

1. Es bezeichne S die Region

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -1\le x\le 1,\ -1\le y\le 1,\ 0\le z\le 4-(x+y)^2\right\}.$$

Verwenden Sie den Divergenzsatz um den Fluss des Vektorfeldes $\vec{v} = (2xy, -y^2, z^2)$ durch S (von innen nach aussen) zu berechnen.



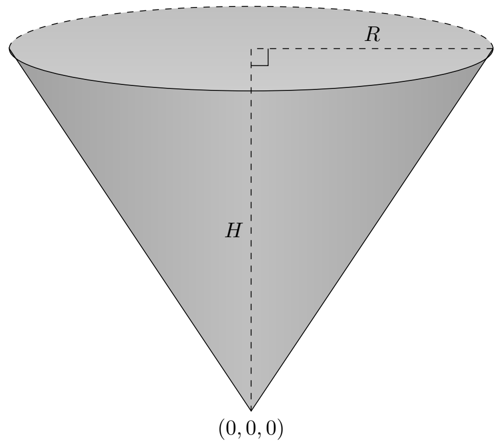
Lösung: Es gilt

$$\operatorname{div}\vec{v} = 2y - 2y + 2z = 2z.$$

Aus dem Divergenzsatz folgt $\Phi_S = \iint_{\partial S} \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\mathcal{O} = \iiint_S \operatorname{div}(\vec{v})\,\mathrm{d}V$ und somit ist

$$\begin{aligned}
\Phi_S &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{4-(x+y)^2} 2z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[z^2\right]_0^{4-(x+y)^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(4-(x+y)^2)^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}\left[16y - \frac{8(x+y)^3}{3} + \frac{(x+y)^5}{5}\right]_{-1}^{1}\mathrm{d}x \\
&= \left[32x - \frac{2(x+1)^4}{3} + \frac{2(x-1)^4}{3} + \frac{(x+1)^6}{30} - \frac{(x-1)^6}{30}\right]_{-1}^{1} = \frac{704}{15}.
\end{aligned}$$

2. Gegeben sei eine Strömung mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = (2x^2, y, 1-z)$.
Welche Menge strömt (von aussen nach innen) pro Zeiteinheit durch die Mantelfläche des geraden Kreiskegels mit Radius R und Höhe H parallel zur z-Achse mit Spitze im Ursprung?



Lösung: Parametrisierung der Kegelmantelfläche

$$\vec{s}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \\ z(r,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\ \cos\varphi \\ r\ \sin\varphi \\ \frac{H}{R} r \end{pmatrix}, \quad 0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$$

mit

$$\vec{s}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \frac{H}{R} \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_\varphi = \begin{pmatrix} -r\ \sin\varphi \\ r\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_r \times \vec{s}_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{rH}{R}\cos\varphi \\ -\frac{rH}{R}\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}$$

Dies ist der Normalenvektor auf der Mantelfläche, der nach innen zeigt. Der Fluss ins Innere des Kegels ist dann

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \vec{v}(\vec{s}(r,\varphi)) \bullet (\vec{s}_r \times \vec{s}_\varphi)\, dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R \begin{pmatrix} 2r^2\cos^2\varphi \\ r\sin\varphi \\ 1-\frac{H}{R}r \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\frac{rH}{R}\cos\varphi \\ -\frac{rH}{R}\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} dr\, d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^R -2\frac{H}{R}r^3\cos^3\varphi - \frac{H}{R}r^2\sin^2\varphi + r - \frac{H}{R}r^2\, dr\, d\varphi \\
&= -\frac{1}{2}R^3H\int_0^{2\pi}\cos^3(\varphi)d\varphi - \frac{1}{3}R^2H\int_0^{2\pi}\sin^2(\varphi)d\varphi + \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}R^2H\right)\int_0^{2\pi} d\varphi \\
&= -\frac{1}{3}R^2H\pi + \left(\frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{3}R^2H\right)2\pi \\
&= R^2\pi - R^2H\pi
\end{aligned}$$

Variante: Man kann auch den Divergenzsatz benutzen. Es gilt $\operatorname{div}\vec{v} = 4x$ und für den gesamten Kegel K erhält man (mit Zylinderkoordinaten)

$$\Phi_K = \iint_{\partial K} \vec{v} \bullet \vec{n}\, d\mathcal{O} = \iiint_K \operatorname{div}\vec{v}\, dV = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{R}{H}z} 4r\cos\varphi \cdot r\, dr d\varphi dz = 0.$$

Dies ist gleich Null, da $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi$ verschwindet. Berechnen wir noch den Fluss durch die Deckfläche D des Kegels (von aussen nach innen, d.h. von oben nach unten). Wir benutzen die Parametrisierung

Siehe nächstes Blatt!

$\vec{r}(\varrho,\varphi) = (\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, H)$, $0 \le \varrho \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ von D mit Normalenvektor $\vec{r}_\varrho \times \vec{r}_\varphi = (0,0,\varrho)$, der nach oben zeigt. Also müssen wir ihn drehen und erhalten

$$\Phi_D = \iint_D \vec{v} \bullet \vec{n}\, d\mathcal{O} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \vec{v}(\vec{r}(\varrho,\varphi)) \bullet (0,0,-\varrho)\, d\varrho d\varphi$$
$$= 2\pi \int_0^R (H-1)\varrho\, d\varrho = \pi(H-1)R^2.$$

Der Fluss durch den Mantel ist gemäss dem Divergenzsatz also $-\pi(H-1)R^2$, weil der Gesamtfluss Null ist. [1] Das bestätigt das Resultat bei der ersten Variante.

3. Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein endlicher Bereich mit Rand ∂B und seien f, g zweimal stetig differenzierbare Skalarfelder. Beweisen Sie die Greenschen Identitäten, die in der Potentialtheorie und in der Elektrodynamik gebraucht werden.

a) Erste Greensche Identität

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \mathbf{grad} g) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O = \iiint_B (f \cdot \Delta g + \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{grad} g)\, \mathrm{d}V$$

Hinweis: Wenden Sie den Divergenzsatz für das Vektorfeld $f \cdot \mathbf{grad} g$ an.

b) Zweite Greensche Identität

$$\iint_{\partial B} (f \cdot \mathbf{grad} g - g \cdot \mathbf{grad} f) \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O = \iiint_B (f \cdot \Delta g - g \cdot \Delta f)\, \mathrm{d}V$$

Lösung:

a) Seien $f : (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$ und $g : (x,y,z) \longmapsto g(x,y,z)$ zwei 2-mal stetig differenzierbare Skalarfelder. Wir definieren das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \vec{v}\,(x,y,z) = f(x,y,z) \cdot \mathbf{grad} g\,(x,y,z) \quad \text{(Hinweis)},$$

und berechnen

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}\vec{v} &= \mathbf{div}\,(f \cdot \mathbf{grad} g) = \mathbf{div}\,(f\,(g_x, g_y, g_z)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f g_x) + \frac{\partial}{\partial y}(f g_y) + \frac{\partial}{\partial z}(f g_z) \\
&= f_x g_x + f g_{xx} + f_y g_y + f g_{yy} + f_z g_z + f g_{zz} \\
&= f \cdot \Big(\underbrace{g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}}_{\Delta g}\Big) + \underbrace{(f_x, f_y, f_z) \cdot (g_x, g_y, g_z)}_{\mathbf{grad} f \cdot \mathbf{grad} g}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Wir wenden nun den Divergenzsatz an und erhalten die erste Greensche Identität

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial B} f \cdot \mathbf{grad} g \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O &= \iint_{\partial B} \vec{v} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}O = \iiint_B \mathbf{div}\vec{v}\, dV \\
&\overset{(1)}{=} \iiint_B (f \cdot \Delta g + \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{grad} g)\, \mathrm{d}V. \qquad (2)
\end{aligned}$$

[1] Bei einer Strömung ist zu erwarten, dass der Gesamtfluss verschwindet. Zumindest wenn es sich um Flüssigkeiten handelt, diese sind normalerweise inkompressibel.

b) Wir ersetzen in Gleichung (2) f durch g und g durch f, und erhalten

$$\iint_{\partial B} g \cdot \mathbf{grad} f \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}O = \iiint_B \left(g \cdot \Delta f + \mathbf{grad} g \cdot \mathbf{grad} f \right) \, \mathrm{d}V. \tag{3}$$

Nun „ziehen“ wir von der Gleichung (2) die Gleichung (3) ab. Da

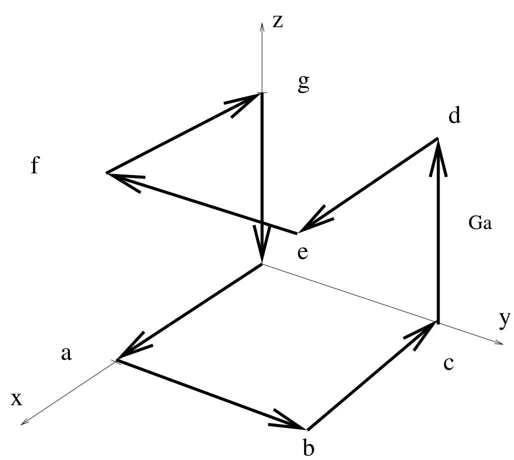
$$\mathbf{grad} g \cdot \mathbf{grad} f = \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{grad} g,$$

erhalten wir die zweite Greensche Identität.

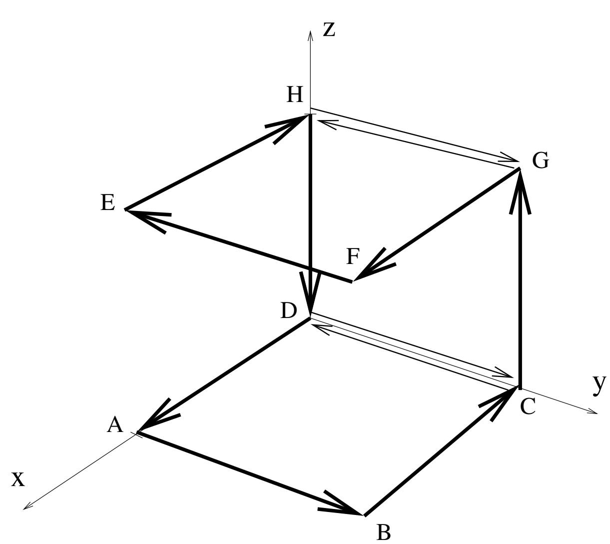
4. Berechnen Sie die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto (yz, xyz, xy)$$

entlang des geschlossenen Weges Γ (siehe Figur) leistet. Die einzelnen Teilabschnitte des Weges Γ haben dabei Länge 1.



Lösung: Wir betrachten die geschlossenen Wege $ABCDA$, $CGHDC$ respektive $GFEHG$.



Siehe nächstes Blatt!

Das Vektorfeld $\vec{v}$ leistet darauf die Arbeit W_{ABCD}, W_{CGHD} respektive W_{GFEH}. Da die beiden Strecken CD und GH zweimal durchlaufen werden, und zwar in entgegengesetzten Richtungen, gilt

$$W_{tot} = W_{ABCD} + W_{CGHD} + W_{GFEH}.$$

Sei Q_{ABCD} das Quadrat $ABCD$, Q_{CGHD} das Quadrat $CGHD$ und Q_{GFEH} das Quadrat $GFEH$. Nach dem Satz von Stokes gilt

$$W_{tot} = \int_\Gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_{Q_{ABCD}} \mathbf{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}O + \iint_{Q_{CGHD}} \mathbf{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}O + \iint_{Q_{GFEH}} \mathbf{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}O.$$

Es gilt $\mathbf{rot}\vec{v}\,(x, y, z) = (x - xy, 0, yz - z)$.
Auf Q_{ABCD} $(z = 0)$ ist $\vec{n} = (0, 0, 1) \perp \mathbf{rot}\vec{v}\,(x, y, 0)$, also $W_{ABCD} = 0$ und auf Q_{CGHD} $(x = 0)$ ist $\vec{n} = (1, 0, 0) \perp \mathbf{rot}\vec{v}\,(0, y, z)$, also $W_{CGHD} = 0$. Es folgt dann

$$\begin{aligned}
W_{tot} &= W_{GFEH} = \iint_{Q_{GFEH}} \mathbf{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}O \\
&\overset{z=1}{=} \int_0^1 \int_0^1 (x - xy, 0, y - 1) \cdot (0, 0, -1)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (1 - y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$