Lösung - Schnellübung 11

1. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \big(2xy + 3, x^2 - 4z, -4y\big) .$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ konservativ ist.

b) Finden Sie eine Funktion f, so dass $\vec{v} = \mathbf{grad} f$.

c) Berechnen Sie

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

wobei C ein beliebiger Weg ist, der die Punkte $(3, -1, 2)$ und $(2, 1, -1)$ verbindet.

Lösung:

a) Es ist $D(\vec{v}) = \mathbb{R}^3$, also einfach zusammenhängend und

$$\mathbf{rot}\vec{v}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4 - (-4) \\ 0 - 0 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Nach Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Satz 4 (Seite 71) ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld. Nach Satz 2 (Seite 69) ist $\vec{v}$ konservativ.

b) Nach Teilaufgabe a) existiert f, so dass

$$\vec{v}\,(x, y, z) = \mathbf{grad} f\,(x, y, z) \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & f_x\,(x, y, z) = 2xy + 3 \\ \text{(ii)} & f_y\,(x, y, z) = x^2 - 4z \\ \text{(iii)} & f_z\,(x, y, z) = -4y. \end{array}$$

Aus (i) folgt, dass $f\,(x, y, z) = x^2y + 3x + C\,(y, z)$, wobei C eine Funktion von y und z ist. Damit ist aus (ii) $x^2 - 4z = f_y\,(x, y, z) = x^2 + C_y\,(y, z)$ oder $C_y\,(y, z) = -4z$, also $C\,(y, z) = -4yz + D(z)$, wobei D eine Funktion von z ist. Somit schreibt sich f als $f\,(x, y, z) = x^2y + 3x - 4yz + D(z)$. Aus (iii) folgt dann $-4y = f_z\,(x, y, z) = -4y + D_z(z)$ oder $D_z(z) = 0$, also $D(z) = K$ mit K eine Konstante in $\mathbb{R}$. Zusammenfassend erhalten wir

$$f\,(x, y, z) = x^2y + 3x - 4yz + K.$$

c) Da $\vec{v}$ ein Potentialfeld ist (wegen Teilaufgabe a) oder b)), gilt dass (Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 68)

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = f\,(2, 1, -1) - f\,(3, -1, 2) \overset{\text{b)}}{=} 6.$$

Bitte wenden!

2. Bestimmen Sie das Potential f des Coulombfelds

$$\vec{v}(\vec{r}\,) = -C\frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|^3}$$

auf dem Gebiet $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Lösung: Wie wir früher gesehen haben (vgl. Stammbach, Teil B, Kapitel VI.2), ist $\operatorname{rot}\vec{v} = (0,0,0)$. Da das Gebiet $D = \mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ einfach zusammenhängend ist, existiert also ein Potential f von $\vec{v}$. Für dieses Potential muss insbesondere gelten

$$f_x(x,y,z) = -\frac{Cx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Wenn wir nun die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

betrachten, liegt die Lösung nahe:

$$f(x,y,z) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ist ein Potential von $\vec{v}$ (anders geschrieben $f(\vec{r}) = \dfrac{C}{|\vec{r}|}$).

3. Lösen Sie Differenzialgleichung

$$1 - x^2 + y^2 = 2xyy'$$

mit Hilfe der Substitution $u(x) = (y(x))^2$.

Lösung: Mit $u\left(x\right) = y\left(x\right)^2$ erhält man $u'\left(x\right) = 2y\left(x\right)y'\left(x\right)$. Eingesetzt in die Differenzialgleichung ergibt dies

$$1 - x^2 + u = xu' \;\text{ oder }\; u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung. Wir suchen die allgemeine Lösung u_h der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung $u' - \frac{1}{x}u = 0$ (sie ist separierbar). Es gilt

$$u' - \frac{1}{x}u = 0 \Longrightarrow \int\frac{\mathrm{d}u}{u} = \int\frac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow \ln|u| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$u_h\left(x\right) = Kx, \quad K = \pm e^C.$$

Nun suchen wir eine partikuläre Lösung u_p der Differenzialgleichung $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$: Wir benutzen die Methode von Lagrange (Variation der Konstanten), wähle

$$u_p\left(x\right) = \gamma\left(x\right)\cdot u_h\left(x\right) = \gamma\left(x\right)\cdot Kx.$$

Eingesetzt in $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$ liefert

$$\gamma'\left(x\right) = \frac{1-x^2}{x}\cdot\frac{1}{u_h\left(x\right)} = \frac{1-x^2}{x}\cdot\frac{1}{Kx} = \frac{1}{K}\left(\frac{1}{x^2}-1\right) \Longrightarrow \gamma\left(x\right) = \frac{1}{K}\left(-\frac{1}{x}-x\right).$$

Siehe nächstes Blatt!

(Auf die Integrationskonstante kann verzichtet werden, da wir nur eine partikuläre Lösung suchen). Also ist

$$u_p(x) = \gamma(x) \cdot Kx = \frac{1}{K}\left(-\frac{1}{x} - x\right) \cdot Kx = -1 - x^2.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1-x^2}{x}$

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Kx - 1 - x^2,$$

und somit ist die allgemeine Lösung von $1 - x^2 + y^2 = 2xyy'$ gegeben durch

$$y(x)^2 = u(x) = Kx - 1 - x^2.$$

Zu Übungszwecken skizzieren wir die Lösung (auch wenn das in der Übung nicht gefragt ist). Durch quadratische Ergänzung erhält man

$$\begin{aligned} y^2 = Kx - 1 - x^2 \quad &\iff \quad y^2 - Kx + x^2 = -1 \\ &\iff \quad y^2 + \underbrace{x^2 - Kx + \left(\frac{K}{2}\right)^2}_{\left(x-\frac{K}{2}\right)^2} - \left(\frac{K}{2}\right)^2 = -1 \\ &\iff \quad \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{K^2}{4} - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Aus (1) folgt, dass die Lösungskurven (im Fall $\frac{K^2}{4} - 1 > 0$ oder $K^2 > 4$ oder $|K| > 2$) Kreise mit Mittelpunkt $\left(\frac{K}{2}, 0\right)$ und Radius $\sqrt{\frac{K^2}{4} - 1}$ sind.

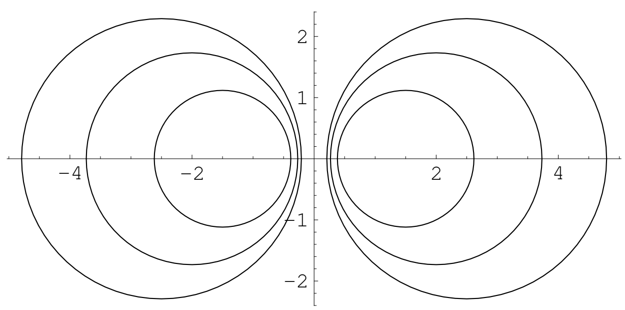


Abbildung 1: Lösungskurven für $K = -5, -4, -3, 3, 4, 5$

Bitte wenden!

4. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

a)

$$\begin{cases} y' - 3y = e^{2x}, & x \in (-\infty, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} xy' - 2y = x^5, & x \in (0, \infty) \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} y' + y \tan x = \sin 2x, & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}, & x \in (-\infty, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Lösung:

a) Die homogene Gleichung $y' - 3y = 0$ ist separierbar und hat allgemeine Lösung $y_h = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$. Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den Ansatz $y_p = \alpha e^{2x}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, welches wir durch Einsetzen in die DGL bestimmen:

$$y_p' - 3y_p = 2\alpha e^{2x} - 3\alpha e^{2x} = -\alpha e^{2x} = e^{2x}.$$

Nach Vergleichen der Koeffizienten folgt, dass $\alpha = -1$ ist. Somit ist $y_p = -e^{2x}$ und die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = Ce^{3x} - e^{2x}.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = C - 1 = 0 \Longrightarrow C = 1.$$

Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblemes ist also

$$y = e^{3x} - e^{2x}.$$

b) Die homogene Gleichung $xy' - 2y = 0$ ist separierbar und hat allgemeine Lösung $y_h = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$. Für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung machen wir den polynomiellen Ansatz

$$y_p = \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta.$$

Wir setzen y_p in die Gleichung ein, um die Koeffizienten zu bestimmen:

$$xy_p' - 2y_p = 3\alpha x^5 + 2\beta x^4 + \gamma x^3 - \varepsilon x - 2\zeta = x^5.$$

Nach Vergleichen der Koeffizienten folgt, dass $\alpha = 1/3$, $\beta = \gamma = \varepsilon = \zeta = 0$ sind und δ beliebig gewählt werden kann. Da wir nur eine partikuläre Lösung suchen, wählen wir $\delta = 0$ und somit ist $y_p = \frac{1}{3}x^5$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y = Cx^2 + \frac{x^5}{3}.$$

Siehe nächstes Blatt!

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = C + \frac{1}{3} = 1 \Longrightarrow C = \frac{2}{3}.$$

Die gesuchte Lösung des Anfangswertproblemes ist also

$$y = \frac{2x^2 + x^5}{3}.$$

c) Wir lösen die homogene Gleichung $y' + y\,\tan x = 0$:

$$y_h' + y_h\,\tan x = 0 \Longleftrightarrow \frac{y_h'}{y_h} = -\tan x \Longrightarrow \log|y_h| = \log|\cos x| + K_1$$
$$\Longrightarrow y_h = K_2\,\cos x.$$

Hierbei sind K_1 und K_2 Konstanten. Für die inhomogene Gleichung $y' + y\,\tan x = \sin 2x$ machen den Lagrange-Ansatz $y = \gamma(x)\cos x$, wobei γ eine Funktion von x ist:

$$\begin{aligned} y' + y\,\tan x &= \gamma'(x)\cos x - \gamma(x)\sin x + \gamma(x)\cos x\tan x = \gamma'(x)\cos x \\ &= \sin 2x = 2\sin x\cos x. \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma'(x) = 2\sin x$ und somit $\gamma(x) = -2\cos x + K$ für eine Konstante K. Wir haben also die allgemeine Lösung

$$y = (-2\cos x + K)\cos x = K\cos x - 2\cos^2 x.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = K - 2 = 2 \Longrightarrow K = 4.$$

Dann ist die gesuchte Lösung $y = 4\cos x - 2\cos^2 x$.

d) Wir lösen die homogene Gleichung $(1 + x^2)y' + 4xy = 0$:

$$(1 + x^2)y_h' + 4xy_h = 0 \Longleftrightarrow \frac{y_h'}{y_h} = -\frac{4x}{1 + x^2} \Longrightarrow \log|y_h| = -2\log(1 + x^2) + K_1$$
$$\Longrightarrow y_h = \frac{K_2}{(1 + x^2)^2},$$

wobei K_1 und K_2 Konstanten sind. Für die inhomogene Gleichung $(1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}$ machen den Lagrange-Ansatz $y = \frac{\gamma(x)}{(1+x^2)^2}$, wobei γ eine Funktion von x ist:

$$\begin{aligned} (1 + x^2)y' + 4xy &= (1 + x^2)\cdot\frac{\gamma'(x)(1 + x^2)^2 - 4x(1 + x^2)\cdot\gamma(x)}{(1 + x^2)^4} + \frac{4x\gamma(x)}{(1 + x^2)^2} \\ &= \frac{\gamma'(x)}{1 + x^2} = (1 + x^2)^{-2} \end{aligned}$$

Dann ist $\gamma'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und somit $\gamma(x) = \arctan x + K$ für eine Konstante K. Wir haben also die allgemeine Lösung

$$y = \frac{\arctan x + K}{(1 + x^2)^2}.$$

Aus der Anfangsbedingung ergibt sich:

$$y(0) = K = 0 \Longrightarrow K = 0.$$

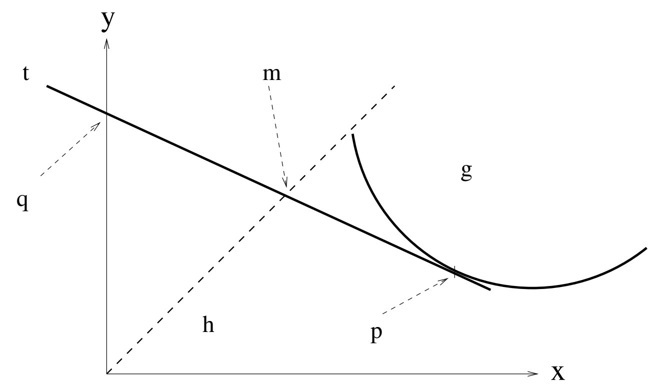
Dann ist die gesuchte Lösung

$$y = \frac{\arctan x}{(1 + x^2)^2}.$$

5. Finden Sie alle Kurven, gegeben durch $y = y(x)$, welche die folgende Bedingung erfüllen: Es sei t die Tangente im Punkt P der Kurve und Q ihr Schnittpunkt mit der y–Achse. Dann liegt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ auf der Geraden, gegeben durch $y = x$.

Lösung:

Sei $P = (x, y(x)) \in \mathbb{R}^2$ ein beliebiger Punkt auf der Kurve K, gegeben durch $y = y(x)$ und $Q = (0, q) \in \mathbb{R}^2$.



Die Tangente t in P an die Kurve K ist gegeben durch

$$t : z \longmapsto y'(x)(z - x) + y(x).$$

Die Tangente t und soll durch $Q = (0, q)$ gehen. Also gilt

$$q = t(0) = y'(x)(0 - x) + y(x) \quad \text{, also} \quad q = -y'(x)x + y(x). \tag{2}$$

Andererseits ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= (x_M, y_M) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2}\left[(x, y(x)) + (0, q)\right] = \frac{1}{2}(x, y(x) + q) \\ &\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}(x, y(x) - y'(x)x + y(x)) = \left(\frac{1}{2}x, y(x) - \frac{1}{2}y'(x)x\right), \end{aligned}$$

wobei $O = (0, 0)$ ist. Da der Mittelpunkt (x_M, y_M) auf der Geraden, gegeben durch $y = x$, liegt, muss gelten $x_M = y_M$, also

$$\frac{1}{2}x = y(x) - \frac{1}{2}y'(x)x \Longleftrightarrow y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = -1 \ \ (x \neq 0),$$

d.h $y : x \longmapsto y(x)$ ist Lösung der folgenden inhomogenen linearen Differenzialgleichung erster Ordnung

$$y' - \frac{2}{x}y = -1.$$

Wir suchen eine allgemeine Lösung y_h der zugehörigen (separierbaren) homogenen Differenzialgleichung:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \Longrightarrow \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|y| = 2(\ln|x| + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\Longrightarrow y_h\,(x) = Kx^2,\ K \in \mathbb{R}$$

Für die partikuläre Lösung y_p der Differenzialgleichung $y' - \frac{2}{x}y = -1$ machen wir folgenden Ansatz:

$$y_p\,(x) = ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Damit ist $y_p'(x) = a$. Eingesetzt in die Differenzialgleichung $y' - \frac{2}{x}y = -1$ oder $y'x - 2y = -x$ liefert

$$(-1) \cdot x = ax - 2(ax + b) = ax - 2ax - 2b = -ax - 2b.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert $-a = -1$ und $-2b = 0$, also $a = 1$ und $b = 0$. Damit ist $y_p(x) = x$. Die allgemeine Lösung von $y' - \frac{2}{x}y = -1$ ist somit

$$y(x) = y_h\,(x) + y_p\,(x) = Kx^2 + x,\ K \in \mathbb{R}.$$

Dies ist die Gleichung der Kurven, die unsere Bedingungen erfüllen.