Lösung - Serie 15

1. Der Wert einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fällt am schnellsten in die Richtung

(a) der minimalen partiellen Ableitung.

(b) entgegengesetzt zur maximalen partiellen Ableitung.

(c) des Gradienten.

√ (d) entgegengesetzt zum Gradienten.

(e) orthogonal zum Gradienten.

Lösung: Die Frage ist äquivalent dazu, für welchen Einheitsvektor $\vec{e}$ die Richtungsableitung $D_{\vec{e}}f$ am kleinsten, das heisst, am meisten negativ ist. Die Richtungsableitung ist aber gleich $\vec{e} \cdot (\mathbf{grad}(f))$, und dies wird am kleinsten für $\vec{e} = -\mathbf{grad}(f) / |\mathbf{grad}(f)|$. Nämlich:

$$\vec{e} \cdot (\mathbf{grad}(f)) = 1|(\mathbf{grad}(f))| \cos(\sphericalangle(\vec{e}, \mathbf{grad}(f)))$$

und so nimmt den kleinsten Wert, falls $\cos(\sphericalangle(\vec{e}, \mathbf{grad}(f))) = -1$, das heisst, $\sphericalangle(\vec{e}, \mathbf{grad}(f)) = \pi$. Das gilt für $\vec{e} = -\mathbf{grad}(f) / |\mathbf{grad}(f)|$. Die richtige Antwort lautet daher (d).

2. Gegeben ist die Funktion $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Kugeln mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

(b) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Ebenen senkrecht zum Vektor $(1, 3, 1)$.

√ (c) Die nichtleeren Niveauflächen von f sind Oberflächen von Ellipsoiden mit Mittelpunkt O oder die Menge $\{(0, 0, 0)\}$.

Lösung: Die Niveaufläche von f zum Niveau C ist die Menge

$$N_C(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y, z) = C\}.$$

Für $C \in \mathbb{R}^+_*$ ist also ein Ellipsoid mit Mittelpunkt O, für $C = 0$ ist die Menge $\{(0, 0, 0)\}$, und sonst ist die leere Menge.

3. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + y + z^3$ an der Stelle $(1,2,2)$ in Richtung des Einheitsvektors $\frac{1}{3}(2,2,1)$.

(a) $\dfrac{34}{3}$

√ (b) 6

(c) $(2,1,12)$

(d) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 4)$

Lösung: Der Gradient $\mathbf{grad} f(x,y,z) = (2x, 1, 3z^2)$ hat im Punkt $(1,2,2)$ den Wert $(2,1,12)$. Somit ist die fragliche Richtungsableitung $D_e f(1,2,2) = \frac{1}{3}(2,2,1) \cdot (2,1,12) = \frac{1}{3}(2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 12) = 6$. Also ist (b) die richtige Antwort.

4. Die Richtungsableitung der Funktion $f : (x,y) \mapsto \arctan(x/y)$ an der Stelle $(-3,3)$ in die Richtung des Einheitsvektors $(3/5, 4/5)$ lautet:

√ (a) $\frac{7}{30}$.

(b) $\frac{7}{6}$.

(c) -$\frac{21}{5}$.

(d) -$\frac{21}{25}$.

Lösung: Die Antwort lautet (a). Für alle $x \neq y$ gilt, dass

$$\mathbf{grad}\ f(x,y) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$$

ist. Sei $\vec{e} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Somit ist die gesuchte Richtungsableitung

$$\begin{aligned} D_{\vec{e}} f(-3,3) &= \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \cdot \mathbf{grad}\ f(-3,3) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{(-3)^2+3^2}, \frac{-(-3)}{(-3)^2+3^2} \right) \\ &= \frac{1}{90}(3,4) \cdot (3,3) = \frac{7}{30}. \end{aligned}$$

5. Bestimmen Sie jene Tangentialebenen an das Ellipsoid

$$2x^2 + 2y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1,$$

welche parallel zur Ebene $x + y + z = 1$ sind.

(a) $x + y + z = 0$.

(b) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\}$.

√ (c) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm\sqrt{5}\}$.

(d) $x + y + z = k$, für $k \in \{\pm 1\}$.

Lösung: Wir suchen die Punkte auf dem Ellipsoid, bei denen der Gradient parallel zum Normalenvektor $(1, 1, 1)$ der Ebene ist. Setzen wir

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + \frac{z^2}{4},$$

so müssen wir also **grad** $f(x, y, z) = \left(4x, 4y, \frac{z}{2}\right) = a\,(1, 1, 1)$ mit einer reellen Zahl a verlangen.

Es folgt, dass

$$x = y = \frac{a}{4}\ ,\ z = 2a$$

ist. Einsetzen in die Gleichung des Ellipsoiden führt dann zu

$$1 = f(x, y, z) = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8} + a^2 = \frac{5}{4}\,a^2 \quad \Longrightarrow \quad a_\pm = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Die gesuchten Tangentialebenen müssen die Gleichung $x + y + z = b$ mit $b \in \mathbb{R}$ erfüllen, damit sie parallel zur Ebene $x + y + z = 1$ sind. Da sie

$$(x, y, z) = \left(\frac{a_+}{4}, \frac{a_+}{4}, 2a_+\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

bzw.

$$(x, y, z) = \left(\frac{a_-}{4}, \frac{a_-}{4}, 2a_-\right) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$

enthalten müssen, finden wir durch Einsetzen die Werte $b_\pm = \pm\sqrt{5}$. Die Tangentialebenen sind also

$$x + y + z = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad x + y + z = -\sqrt{5}.$$

Bitte wenden!

6. Finden Sie die Extremalstellen der Funktion

$$f(x,y) = \exp(3y^2 - 1 - x^2)$$

im Bereich

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 2y^2 \leq 4\right\} .$$

Lösung: Für Extremalstellen im Innern des Gebiets B gilt $\mathbf{grad}\, f(x,y) = (0,0)$, also

$$\mathbf{grad}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -\exp(3y^2-1-x^2)2x \\ \exp(3y^2-1-x^2)6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0 \text{ und } y = 0.$$

Für Punkte auf dem Rand wählt man eine Parameterdarstellung des Randes ∂B

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\frac{\sin t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sqrt{2}\sin t \end{pmatrix}$$

und erhält für die Funktion auf dem Rand

$$f|_{\partial B} = f\big(\vec{r}(t)\big) = \exp(3 \cdot 2\sin^2 t - 1 - 4\cos^2 t) = \exp(6\sin^2 t - 4\cos^2 t - 1).$$

(Beachte, dass der Rand eine Ellipse mit Halbachsen 1 und $1/\sqrt{2}$ ist). Um die Extremastellen auf dem Rand zu finden, schauen wir wo $\frac{d}{dt} f\big(\vec{r}(t)\big) = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\exp(6\sin^2 t - 4\cos^2 t - 1) &= \exp(6\sin^2 t - 4\cos^2 t - 1)(6 \cdot 2\sin t\cos t - 4 \cdot 2\cos t(-\sin t)) \\
&= \exp(6\sin^2 t - 4\cos^2 t - 1)(20\sin t\cos t) \\
&= \exp(6\sin^2 t - 4\cos^2 t - 1)10\sin 2t = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin 2t = 0 \Leftrightarrow 2t \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
&\Leftrightarrow t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\},
\end{aligned}$$

da $t \in [0, 2\pi)$.

Man erhält also folgende Kandidatenliste für die Extremalpunkte:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
(x,y)	$(0,0)$	$(2,0)$	$(0,\sqrt{2})$	$(-2,0)$	$(0,-\sqrt{2})$
$f(x,y)$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e^5}$	e^5	$\frac{1}{e^5}$	e^5

Das Minimum beträgt $\frac{1}{e^5}$ und wird auf dem Rand in den Punkten $(\pm 2, 0)$ angenommen. Das Maximum beträgt e^5 und wird auf dem Rand in den Punkten $(0, \pm\sqrt{2})$ angenommen.

7. Sei

a) $z(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ und $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$.

b) $z(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ und $x(t) = e^{-t}$, $y(t) = e^t$.

Siehe nächstes Blatt!

Berechnen Sie die Ableitung $\frac{dz}{dt}$ durch die verallgemeinerte Kettenregel. Prüfen Sie Ihr Resultat durch explizites Ableiten von $z(x(t), y(t))$ nach t.

Lösung: Die partiellen Ableitungen von $z(x, y)$ sind $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = 10y + 3x$. Also erhalten wir für

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y}(t) \\
&= (2x(t) + 3y(t))\dot{x}(t) + (10y(t) + 3x(t))\dot{y}(t) \\
&= 2\sin(t)\cos(t) + 3\cos^2(t) - 10\cos(t)\sin(t) - 3\sin^2(t) \\
&= 3 - 6\sin^2(t) - 8\sin(t)\cos(t) && \mid \text{da } \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) \\
&= 3 - 6\sin^2(t) - 4\sin(2t).
\end{aligned}
$$

Ohne die Kettenregel: $z(t) = z\big(x(t), y(t)\big) = \sin^2(t) + 3\sin(t)\cos(t) + 5\cos^2(t)$ und erhalten für $\frac{dz}{dt} = 2\sin(t)\cos(t) + 3\cos^2(t) - 3\sin^2(t) - 10\sin(t)\cos(t) = 3 - 6\sin^2(t) - 4\sin(2t)$.

Die partiellen Ableitungen von $z(x, y)$ sind $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}$ und $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$. Also erhalten wir für

$$
\begin{aligned}
\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial z}{\partial y}\dot{y}(t) \\
&= \frac{2x(t)}{x^2(t) + y^2(t)}\dot{x}(t) + \frac{2y(t)}{x^2(t) + y^2(t)}\dot{y}(t) \\
&= 2\frac{-e^{-2t} + e^{2t}}{e^{-2t} + e^{2t}} && \mid \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2},\ \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\
&= 2\frac{\sinh(2t)}{\cosh(2t)}.
\end{aligned}
$$

Ohne die Kettenregel: $z(t) = z\big(x(t), y(t)\big) = \ln(e^{2t} + e^{-2t}) = \ln(2\cosh(2t))$ und erhalten, da $\dot{\cosh}(t) = \sinh(t)$, für $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\cosh(2t)} 4\sinh(2t) = 2\frac{\sinh(2t)}{\cosh(2t)}$.

8. Eine Funktion von drei Variablen $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ besitzt im Ursprung in den drei Richtungen

$$
\mathbf{a} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{b} = \Big(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\Big), \quad \mathbf{c} = \Big(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big)
$$

die Richtungsableitungen

$$
D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{0}) = 3\,, \quad D_{\mathbf{b}}f(\mathbf{0}) = -2\,, \quad D_{\mathbf{c}}f(\mathbf{0}) = 5\,.
$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche von f im Ursprung.

Lösung:

Die Richtungsableitung in Richtung $\mathbf{a}$ berechnet sich

$$
D_{\mathbf{a}}f = \mathbf{grad}f \cdot \mathbf{a},
$$

wobei $\mathbf{a}$ ein Einheitsvektor sein muss. Dies führt in unserem Fall zu einem Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{0}) &= 3 = f_x(\mathbf{0}) \\
D_{\mathbf{b}}f(\mathbf{0}) &= -2 = \frac{3}{5}f_x(\mathbf{0}) + \frac{4}{5}f_y(\mathbf{0}) \\
D_{\mathbf{c}}f(\mathbf{0}) &= 5 = -\frac{2}{3}f_x(\mathbf{0}) + \frac{1}{3}f_y(\mathbf{0}) + \frac{2}{3}f_z(\mathbf{0})
\end{aligned}
$$

für die Komponenten von $\mathbf{grad} f(\mathbf{0})$.
Die Lösung lautet $\mathbf{grad} f(\mathbf{0}) = (3, -\frac{19}{4}, \frac{103}{8})$. Daher lautet die Gleichung der Tangentialebene in $\mathbf{0}$

$$3x - \frac{19}{4}y + \frac{103}{8}z = 0.$$

9. Für welche Tripel von Funktionen $\phi, \psi, \chi : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \neq 0\} \to \mathbb{R}$ existiert eine Funktion f, sodass $f_x = \phi$, $f_y = \psi$ und $f_z = \chi$?

Falls f existiert, geben Sie f explizit an.

a) $\phi(x, y, z) = \frac{2x}{y}, \quad \psi(x, y, z) = 3y^2z^2 - \frac{x^2}{y^2}, \quad \chi(x, y, z) = 2y^3z.$

b) $\phi(x, y, z) = e^y + 2xy^3z^2, \quad \psi(x, y, z) = xe^y + 3x^2y^2z^2, \quad \chi(x, y, z) = 2x^2y^3 + x.$

c) $\phi(x, y, z) = e^z y\cos(xy)\,, \quad \psi(x, y, z) = e^z x\cos(xy)\,, \quad \chi(x, y, z) = e^z \sin(xy).$

d) $\phi(x, y, z) = ze^x, \quad \psi(x, y, z) = \frac{1}{z}\sin\left(\frac{y}{z}\right), \quad \chi(x, y, z) = \frac{y}{z^2}\sin\left(\frac{y}{z}\right) + e^x.$

Lösung:

a) Es gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\phi_y = \psi_x\,, \quad \psi_z = \chi_y\,, \quad \chi_x = \phi_z\,,$$

wie man durch einfaches Nachrechnen bestätigt. Wir erhalten f durch Integration. (Der gegebene Differentialausdruck ist auf den beiden Halbräumen $y > 0$ und $y < 0$ definiert, welche beide achsenparallelen (unbeschränkte) Rechtecke sind.)

$$f(x, y, z) = \int f_x(x, y, z)\,dx = \int \phi(x, y, z)\,dx = \int \frac{2\,x}{y}\,dx = \frac{x^2}{y} + g(y, z)$$

Aus

$$3\,y^2z^2 - \frac{x^2}{y^2} = \psi(x, y, z) \overset{!}{=} f_y(x, y, z) = -\frac{x^2}{y^2} + g_y(y, z)$$

erhalten wir

$$g(y, z) = \int 3\,y^2z^2\,dy = y^3z^2 + h(z).$$

Damit ist $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{y} + y^3z^2 + h(z)$, und aus

$$2\,y^3z = \chi(x, y, z) \overset{!}{=} f_z(x, y, z) = 2\,y^3z + h'(z)$$

erhalten wir $h'(z) = 0$, also $h(z) \equiv c$. Somit ist

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{y} + y^3z^2 + c.$$

Genauer ist

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + y^3z^2 + c & \text{für } y > 0 \\ \dfrac{x^2}{y} + y^3z^2 + \tilde{c} & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

wobei wir die Konstanten c und $\tilde{c}$ in den beiden Halbräumen beliebig wählen können.

b) Wie in a) prüft man die Integrabilitätsbedingungen. Es gilt $\psi_z \neq \chi_y$. Der gegebene Ausdruck ist daher kein vollständiges Differential.

c) Es gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\phi_y = \psi_x\,, \quad \psi_z = \chi_y\,, \quad \chi_x = \phi_z\,,$$

wie man durch einfaches Nachrechnen bestätigt. Wir erhalten f durch Integration.

$$f(x,y,z) = \int \phi(x,y,z)\,dx = \int e^z y\cos(xy)\,dx = e^z\sin(xy) + g(y,z)$$

Aus

$$e^z x\cos(xy) = \psi(x,y,z) \stackrel{!}{=} f_y(x,y,z) = e^z x\cos(xy) + g_y(y,z)$$

erhalten wir

$$g(y,z) = \int 0\,dy = 0 + h(z).$$

Damit ist $f(x,y,z) = e^z\sin(xy) + 0 + h(z)$, und aus

$$e^z\sin(xy) = \chi(x,y,z) \stackrel{!}{=} f_z(x,y,z) = e^z\sin(xy) + h'(z)$$

erhalten wir $h'(z) = 0$, also $h(z) \equiv c$. Somit ist

$$f(x,y,z) = e^z\sin(xy) + c.$$

d) Wie in c) prüft man die Integrabilitätsbedingungen. Es gilt $\psi_z \neq \chi_y$. Der gegebene Ausdruck ist daher kein vollständiges Differential.