D-MAVT/D-MATL
Dr. Andreas Steiger

Analysis II

FS 2019

Lösung - Serie 21

1. Welches der folgenden Vektorfelder hat ein Potential auf $\mathbb{R}^2$?

(a) $(x-y,\, x-y)$

(b) $(x^2-y,\, x^3+2xy)$

√ (c) $(x^3+2xy,\, x^2-y)$

(d) $(x^3-xy^2,\, x^2y-y^5)$

Ein C^1-Vektorfeld $K=(P,Q)$ auf $\mathbb{R}^2$ besitzt ein Potential genau dann, wenn $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ist. Diese partiellen Ableitungen sind im Fall (a) gleich $-1\neq 1$, im Fall (b) gleich $-1\neq 3x^2+2y$, im Fall (c) gleich $2x=2x$, und im Fall (d) gleich $-2xy\neq 2xy$. Also lautet die richtige Antwort (c). Das zugehörige Potential ist in diesem Fall gleich $\frac{x^4}{4}+x^2y-\frac{y^2}{2}+c$ für eine beliebige Konstante c.

2. Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld auf $D\subset\mathbb{R}^3$, sodass

$$\int_W \vec{v}\cdot d\vec{r}=0$$

für alle geschlossene Wege W in D. Was folgt?

√ (a) Die Arbeit $\int_W \vec{v}\cdot d\vec{r}$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt von W ab.

√ (b) $\operatorname{rot}\vec{v}=(0,0,0)$

(c) $\operatorname{div}\vec{v}=0$

Nein, das hat nichts damit zu tun. (Finde ein Gegenbeispiel!)

(d) $\int_W \vec{v}\cdot d\vec{r}=0$ für alle Wege W.

Nein, das gilt nur für geschlossene Wege.

√ (e) Es existiert eine Funktion $f:D\to\mathbb{R}$, sodass $\vec{v}=\operatorname{grad} f$.

Nach Definition ist ein Vektorfeld $\vec{v}$ genau dann konservativ, wenn die Arbeit von $\vec{v}$ nur von Anfangs- und Endpunkt von W abhängig ist. Die Aussage $a)$ ist genau der Satz 1 im Stammbach Buch (Kapitel VI.10, Seite 67). Nach dem Satz 2 (Kapitel VI.10, Seite 69) ist $\vec{v}$ genau dann konservativ, wenn es ein Potentialfeld ist, d.h. die Aussage $e)$ ist richtig. Deswegen ist $\vec{v}$ wirbelfrei (Satz 3 Kapitel VI.10, Seite 70) und die Aussage $b)$ ist auch richtig.

Bitte wenden!

3. Wie gross ist die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \big(x^2 + z^2, 4y - z, 2xz + 2y\big)$$

entlang des Einheitskreises γ in der (y, z)–Ebene leistet? (Der Durchlaufsinn von γ bilde mit der x–Achse eine Rechtsschraube, schaut man also entlang der positiven Richtung der x-Achse, so wird γ im Uhrzeigersinn durchlaufen.)

(a) π.

$\surd$ (b) 3π.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

(d) 0.

Sei E die Einheitskreisscheibe in der (y, z)–Ebene, also $\gamma = \partial E$. Wir berechnen

$$\mathbf{rot}\vec{v}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 2z-2z \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ auf E, mit dem γ eine Rechtsschraube bildet, ist $(1, 0, 0)$. Nach dem Satz von Stokes ist die gesuchte Arbeit A gegeben durch

$$A = \int_\gamma \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_E \mathbf{rot}\vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}O = \iint_E \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}O = 3 \iint_E \mathrm{d}O = 3\pi.$$

Die letzte Gleichung folgt, weil die Fläche von E gleich π ist.
Also ist **b)** die richtige Antwort.

Siehe nächstes Blatt!

4. Für welche a ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\ln\left(1 + x^2\right) + ay^2, xy + y^2, z^3\right)$$

von der Form $\vec{v} = \mathbf{grad} f$ für eine gewisse Funktion $f = f(x, y, z)$ (die man nicht zu bestimmen braucht)?

(a) $a = 0$.

(b) $a = -1/2$.

√ (c) $a = 1/2$.

(d) $a = 1/2$ und $a = -1/2$.

(e) Es gibt kein solches a, da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

Wir benutzen den Satz 4 vom Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 71. Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist der ganze Raum $\mathbb{R}^3$, da $\ln(1 + x^2)$ definiert ist für alle $x \in \mathbb{R}$, und also ist $\mathrm{D}(\vec{v})$ einfach zusammenhängend. Nun gilt

$$\mathbf{rot}\vec{v}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ y - 2ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } (x, y, z) \in \mathrm{D}(\vec{v})$$

$$\iff y - 2ay = y(1 - 2a) = 0 \ \text{ für alle } (x, y, z) \in \mathrm{D}(\vec{v}).$$

Daraus folgt, dass $1 - 2a = 0$ oder $a = \frac{1}{2}$. Nach dem oben erwähnten Satz gilt

$$a = \frac{1}{2} \Longrightarrow \text{es gibt ein } f \text{ mit } \mathbf{grad} f = \vec{v}.$$

Andererseits gilt nach dem Satz 3 auf Seite 70, dass ein Potentialfeld wirbelfrei sein muss, und $\vec{v}$ ist nur für $a = \frac{1}{2}$ wirbelfrei. Die richtige Antwort ist somit c).

Bitte wenden!

5. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind einfach zusammenhängend?

$\surd$ (a) Hohlkugel $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$

(b) Gefüllter Torus

(c) $\mathbb{R}^3 \setminus x-$Achse

$\surd$ (d) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1,2,3)\}$

$\surd$ (e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \geq 1\}$

Ein Bereich D heisst einfach zusammenhängend, wenn sich jeder geschlossene Weg W in D stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

Die Hohlkugel ist einfach zusammenhängend, da man jeden geschlossenen Weg zu einem Punkt zusammenziehen kann, ohne die Hohlkugel dabei zu verlassen. Somit ist (a) richtig. Auf ähnliche Art sieht man, dass das Komplement eines vollen Ellipsoids einfach zusammenhängend ist, womit (e) richtig ist. Der gefüllte Torus ist nicht einfach zusammenhängend, da jeder geschlossene Weg, der um das Loch herumgeht, nicht zu einem Punkt zusammengezogenen werden kann. Somit ist (b) falsch. Der ganze Raum, aus dem man einen Punkt entfernt hat, ist einfach zusammenhängend, da beim Zusammenziehen einer geschlossenen Kurve lässt sich dieser eine Punkt immer vermeiden. Der ganze Raum, aus dem man eine Gerade entfernt hat, ist nicht einfach zusammenhängend, denn eine geschlossene Kurve, die um diese Gerade herumführt, lässt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen. Deswegen ist die Aussage (c) falsch und (d) richtig.

6. **a)** Berechnen Sie das Integral $\Phi = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dO$, wobei $\vec{F}(x, y, z) = (yz, -xz, xy)$ ist und

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 8z^2 = 1, z \geq 0\},$$

einen Teil der Oberfläche des Ellipsoids bezeichnet. Die Normale zeigt nach oben.

Benutzen Sie dazu den Satz von Stokes zweimal (einmal in jede Richtung), um das Integral über die Fläche S in ein Integral über eine Fläche $\widetilde{S}$ umzuformen, welches einfacher zu berechnen ist.

b) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um Φ via Wegintegral zu berechnen.

Lösung:

a) Es sei C die geschlossene Kurve, welche S berandet. Dann gilt

$$\Phi = \iint\limits_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dO = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit

$$\begin{aligned} C &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 8z^2 = 1, z = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\right\}. \end{aligned}$$

Das ist ein Kreis in der xy-Ebene.
Die Kreisscheibe $\widetilde{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\right\}$ besitzt dieselbe Randkurve C. Nach dem Satz von Stokes ist das Integral unabhängig von der Wahl der Fläche. Wir benutzen folgende Parametrisierung von $\widetilde{S}$:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = 0; \quad \text{mit } 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Der Normalenvektor ist gemäss Aufgabenstellung $\vec{n} = (0, 0, 1)$ und damit ergibt sich

$$\Phi = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\widetilde{S}} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dO = \iint_{\widetilde{S}} \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ -2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dO.$$

Weil $\widetilde{S}$ auf der xy-Ebene liegt, ist dort $z = 0$, also ist auch das Integral $\Phi = 0$.

b) Wir parametrisieren C durch

$$\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

mit

$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0) = (-y, x, 0).$$

Also gilt

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_0^{2\pi} \vec{F}\,(r(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt = \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t \cdot \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

7. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = \left(y^2 z, xyz, 2xy^2\right)$.
Vom Nullpunkt des Koordinatensystems aus ist auf einem geradlinigen Weg W die Oberfläche der Einheitskugel zu erreichen. Finden Sie alle Endpunkte des Wegs, so dass die Arbeit entlang W maximal ist.

Bitte wenden!

Lösung: Sei $P = (X, Y, Z)$ ein Punkt auf der Einheitskugel. Es gilt also $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Dann wird der Weg von O nach P wie folgt parametrisiert

$$\vec{r}(t) = t \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \qquad 0 \le t \le 1.$$

Die längs dieses Weges von $\vec{v}$ verrichtete Arbeit $A(P)$ ist dann

$$A(P) = \int_0^1 \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \dot{\vec{r}}(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 Y^2 Z \\ t^3 XYZ \\ 2t^3 XY^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dt = XY^2 Z \int_0^1 4t^3\, dt = XY^2 Z.$$

Es ist also das Maximum von XY^2Z unter der Nebenbedingung $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ gesucht. Man setzt $Y^2 = 1 - X^2 - Z^2$ ein und muss nun das Maximum der Funktion $A(P) = XZ(1 - X^2 - Z^2)$ in der Kreisscheibe $X^2 + Z^2 \le 1$ suchen. Man beachte, dass auf dem Rand der Kreisscheibe $A(P) = 0$ ist. Für extremale Punkte im Innern verschwindet der Gradient. Man hat also

$$\begin{pmatrix} A_X \\ A_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z(1 - Z^2 - 3X^2) \\ X(1 - X^2 - 3Z^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungen dieses Gleichungssystem, für die $X = 0$ oder $Z = 0$ ist, liefern $A = 0$. Für die andern Lösungen gilt das Gleichungssystem

$$\begin{matrix} 1 - Z^2 - 3X^2 = 0 \\ 1 - X^2 - 3Z^2 = 0 \end{matrix} \qquad \text{mit der Lösung} \qquad X^2 = Z^2 = \frac{1}{4}\,.$$

In diesem Fall ist dann $Y^2 = 1 - X^2 - Z^2 = \frac{1}{2}$, und man erhält die vier Punkte

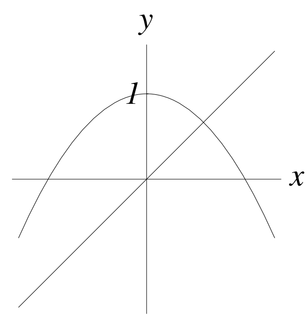
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{mit maximaler Arbeit} \qquad A = \frac{1}{8}\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

8. Für $a > 0$ sei P_a die Parabel mit Achse y und Scheitelpunkt $(0, 1)$, die durch den Punkt (a, a) geht. Sei γ_a der Weg von $(0, 1)$ nach (a, a) entlang P_a. Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x, y) \longmapsto \left(\frac{y-1}{x}, \frac{-1}{x}\right)$$

entlang γ_a minimal wird.



Lösung: Eine Parabel mit Achse y und Scheitel $(0, 1)$ hat die Form $y = cx^2 + 1$. Soll sie durch den Punkt (a, a) gehen, so folgt $c = \frac{a-1}{a^2}$. Eine Parametrisierung des Weges W_a ist durch

$$\vec{r}(t) = \left(t, \frac{a-1}{a^2}t^2 + 1\right), \quad 0 \leq t \leq a$$

gegeben. Für die Arbeit $W(a)$ längs γ_a erhält man dann

$$W(a) = \int_{\gamma_a} \vec{v} \boldsymbol{\cdot} \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^a \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big) \boldsymbol{\cdot} \dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a \left(\frac{a-1}{a^2}t, -\frac{1}{t}\right) \boldsymbol{\cdot} \left(1, 2\frac{(a-1)}{a^2}t\right)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a-1}{a^2}\int_0^a (t-2)\,dt = \frac{a-1}{a^2}\left(\frac{a^2}{2} - 2a\right) = \frac{a^2 - 5a + 4}{2a}.$$

Man sucht nun das Minimum der Funktion $W(a)$ im offenen Intervall $(0, +\infty)$. Extremale Punkte findet man mit Hilfe der Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}W(a) = \frac{(2a-5)2a - 2(a^2 - 5a + 4)}{4a^2} = \frac{2a^2 - 8}{4a^2} = 0 \iff a^2 = 4.$$

Man erhält im Intervall $(0, +\infty)$ die Lösung $a = 2$. Man beachte noch, dass $W(a) \to +\infty$ für $a \to 0^+$ resp. $a \to +\infty$. Also ist in $a = 2$ das Minimum mit $W(2) = -\frac{1}{2}$.

9. Wir betrachten das wirbelfreie Vektorfeld (Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters, vgl. Kap. VI, S. 14)

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$$

aber jetzt nur im Halbraum $x > 0$. Dieser Definitionsbereich ist einfach zusammenhängend. Also besitzt $\vec{v}$ darin ein Potential f.

a) Berechnen Sie f durch Bestimmung der Arbeit von $\vec{v}$ vom Punkt $(1, 0, 0)$ zum Punkt (x, y, z) längs eines geeigneten Weges.

b) Verifizieren Sie, dass $\mathbf{grad}\, f = \vec{v}$ ist.

Lösung:

a) Da $\vec{v}$ ein Potential ist, existiert es eine Funktion g mit $\vec{v} = \operatorname{grad} g$. Es gilt (vgl. Stammbach, Kapitel VI.10)

$$g(x, y, z) - g(1, 0, 0) = \int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

Bitte wenden!

für jeden Weg γ von $(1,0,0)$ bis (x,y,z). Wir berechnen $f(x,y,z) = \int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{r}$ für einen geeigneten Weg γ. Dann ist

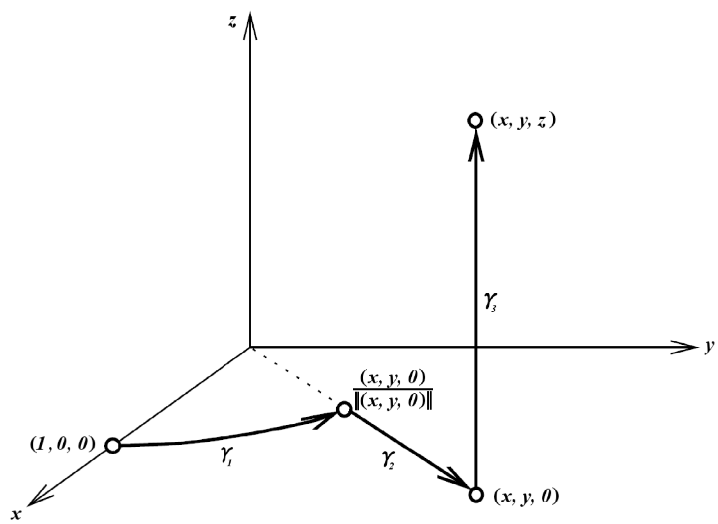
$$\operatorname{grad} f = \operatorname{grad}(g - g(1,0,0)) = \operatorname{grad} g = \vec{v},$$

denn $g(1,0,0)$ eine Konstante ist.

Am besten wählt man den in der Figur eingezeichneten Weg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$. Die Feldlinien sind Kreisbögen parallel zur xy-Ebene mit Zentrum auf der z-Achse (Stammbach, Kapitel VI, Seite 8). Daher ist auf den Wegstücken γ_2 und γ_3 das Vektorfeld senkrecht zur Tangentialrichtung entlang des Weges und die Arbeit gleich Null. Für den Weg γ_1 auf dem Kreisbogen wählt man die übliche Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ 0)\,, \quad 0 \le t \le \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

und erhält für die Arbeit f



$$f(x,y,z) = \int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\arctan(y/x)} \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big)\cdot\dot{\vec{r}}(t)\,dt = \int_0^{\arctan(y/x)} (-\sin t,\ \cos t,\ 0)\cdot(-\sin t,\ \cos t,\ 0)\,dt$$
$$= \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

b) $\mathbf{grad}\, f(x,y,z) = \left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{-y}{x^2},\ \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{1}{x},\ 0\right) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ 0\right) = \vec{v}.$

10. **a)** Berechnen Sie das Potential des Kraftfeldes $(x+z^2, yz, \frac{y^2}{2}+2xz)$. Wie gross ist die verrichtete Arbeit, wenn man vom Punkt $(1,0,0)$ nach $(2,1,3)$ geht?

b) Gegeben sei das Kraftfeld $(x, y, \sqrt{x^2+y^2})$. Berechnen Sie die Arbeit, wenn man sich entlang der spiralförmigen Kurve $(t\cos(t), t\sin(t), t)$ für $0 \le t \le R$ bewegt.

c) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x,y,z) \longmapsto \big(5005x^{1000}y^3z,\ 15x^{1001}y^2z + 2y,\ 5x^{1001}y^3\big)\,.$$

Siehe nächstes Blatt!

Berechnen Sie die Arbeit A von $\vec{v}$ entlang der Strecke von $P = (1,0,1)$ nach $Q = (0,1,1)$.

Lösung:

a) Um ein Potential auszurechnen berechnen wir die Arbeit wenn wir uns vom Punkt $P_0(0,0,0)$ zu einem beliebigen anderen Punkt $P(x,y,z)$ durch das Vektorfeld $v = (x+z^2, yz, \frac{y^2}{2} + 2xz)$ bewegen. Dies könnte beispielsweise auf einer Geraden sein:

$$\gamma(t) = (tx, ty, tz).$$

Das Potential berechnet sich dann als Wegintegral

$$\begin{aligned}
\psi(x,y,z) &= \int_\gamma v\,ds = \int_0^1 v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt \\
&= \int_0^1 \begin{pmatrix} tx + t^2z^2 \\ t^2yz \\ t^2y^2/2 + 2t^2xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^1 tx^2 + 3t^2xz^2 + \frac{3}{2}t^2y^2z\,dt \\
&= \frac{1}{2}x^2 + xz^2 + \frac{1}{2}y^2z
\end{aligned}$$

Wenn man vom Punkt $(1,0,0)$ nach $(2,1,3)$ geht verrichtet man also die Arbeit

$$W = \psi(2,1,3) - \psi(1,0,0) = 21$$

Bemerkung: Man hätte auch einen anderen Punkt als $P_0(0,0,0)$ als Ausgangspunkt wählen können. Die resultierende Potentialfunktion würde sich dann lediglich um eine Konstante unterscheiden, was bei der Differenzenbildung (s.o.) aber keine Rolle spielt. Auch hätte man einen anderen Weg als eine Gerade nehmen können, was aber ebenfalls keine Rolle spielt, denn falls eine Potentialfunktion existiert, ist die verrichtete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig (also nicht vom dazwischenliegenden Weg).

b) Die Arbeit berechnet sich als Wegintegral

$$\begin{aligned}
W &= \int_\gamma v\,ds = \int_0^R v(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,dt \\
&= \int_0^R \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^R t\cos^2 t + t\sin^2 t + t\,dt \\
&= R^2.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Dieses Vektorfeld hat kein Potential, da $\operatorname{rot} v \neq 0$. Man muss also das Wegintegral ausrechnen.

c) Der Definitionsbereich von $\vec{v}$ ist der ganze Raum $\mathbb{R}^3$, also einfach zusammenhängend, und

$$\mathbf{rot}\vec{v}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} 15x^{1001}y^2 - 15x^{1001}y^2 \\ 5005x^{1000}y^3 - 5005x^{1000}y^3 \\ 15 \cdot 1001x^{1000}y^2z - 3 \cdot 5005x^{1000}y^2z \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Bitte wenden!

Nach Satz 4 vom Stammbach–Skript, Teil B, Kapitel VI, Seite 71, ist $\vec{v}$ ein Potentialfeld, d.h es existiert ein Skalarfeld $f = f(x, y, z)$ mit $\mathbf{grad} f = \vec{v}$. Somit ist

$$\mathbf{grad} f(x,y,z) = \vec{v}\,(x,y,z) \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} \text{(i)} & f_x\,(x,y,z) = 5005x^{1000}y^3z \\ \text{(ii)} & f_y\,(x,y,z) = 15x^{1001}y^2z + 2y \\ \text{(iii)} & f_z\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3. \end{array}$$

Aus (iii) folgt, dass $f\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3z + C(x,y)$, wobei C eine Funktion von x und y ist. Es folgt aus (ii), dass $15x^{1001}y^2z + 2y = f_y\,(x,y,z) = 15x^{1001}y^2z + C_y\,(x,y)$ oder $C_y(x,y) = 2y$, also $C(x,y) = y^2 + D(x)$ mit D eine Funktion von x. f schreibt sich damit als $f\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3z + y^2 + D(x)$. Mit (i) folgt dann, dass $5005x^{1000}y^3z = f_x\,(x,y,z) = 5005x^{1000}y^3z + D_x(x)$ oder $D_x(x) = 0$, also $D(x) = C$, wobei $C \in \mathbb{R}$. Zusammenfassend ist

$$f\,(x,y,z) = 5x^{1001}y^3z + y^2 + C.$$

Damit ist die gesuchte Arbeit A gegeben durch

$$A = f(Q) - f(P) = f(0,1,1) - f(1,0,1) = 1 + C - C = 1.$$