Serie 14

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 06.03.2019 um 08:15 Uhr* ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: *Mittwoch, 06.03.2019* in der Vorlesung.

Homepage der Vorlesung: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Für welche der folgenden Funktionen f ist

$$f_x(x,y) = e^{4x} + 2xy^2,$$
$$f_y(x,y) = \cos y + 2x^2y?$$

(a) $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + \sin y + \pi$.

(b) $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + v(y)$, wobei $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion ist.

(c) $(x,y) \longmapsto \frac{1}{4}e^{4x} + x^2y^2 + \sin(\pi - y)$.

(d) Keine Option ist richtig.

2. Die zweifach stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für welche die partiellen Ableitungen f_{xx} und f_{yy} identisch verschwinden, sind genau

(a) die Produkte einer Funktion von x mit einer Funktion von y.

(b) die Produkte von zwei linearen Funktionen.

(c) die Produkte einer linearen Funktion von x mit einer linearen Funktion von y.

(d) die Funktionen der Gestalt $a + bx + cy + dxy$ für Konstanten a, b, c, d.

Bitte wenden!

3. Die Gleichung der Tangentialebene an das Paraboloid $z = x^2 - y^2$ im Punkt (2,1,3) lautet

(a) $4x - 2y - z = 3$.

(b) $2x + 4y - z = 1$.

(c) $2x + 4y - z = 5$.

(d) $4x + 2y - z = 3$.

4. Für welche der folgenden Paaren von Funktionen $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sodass $f_x(x,y) = \phi(x,y)$ und $f_y(x,y) = \psi(x,y)$ gilt?

Hinweis: Überprüfen Sie die Integralitätsbedingung!

(a) $\phi(x,y) = \left(\frac{y^3}{3}\right)\sinh(x) + y + \frac{x^2}{2}$ und $\psi(x,y) = y^2\cosh(x) + x$.

(b) $\phi(x,y) = x\sin(xy)$ und $\psi(x,y) = x\sin(xy) + 3x$.

(c) $\phi(x,y) = e^{x+\sin(y)}$ und $\psi(x,y) = \cos(y)e^{x+\sin(y)}$.

(d) $\phi(x,y) = xye^{x^2y}$ und $\psi(x,y) = \frac{1}{2}x^2e^{x^2y}$.

(e) $\phi(x,y) = \sinh(x^2y)$ und $\psi(x,y) = \sinh(xy^2)$.

5. Es sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion in zwei Variablen und es seien $x_0, y_0 \in (0,1)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) Falls $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ gilt, so hat f ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum an der Stelle (x_0,y_0).

(b) Falls (x_0,y_0) eine lokale Minimalstelle von f ist, so gilt $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

(c) Wir definieren $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $u : x \mapsto f(x,y_0)$ und $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $v : y \mapsto f(x_0,y)$. Falls x_0 eine globale Maximalstelle von u und y_0 eine globale Maximalstelle von v ist, dann ist (x_0,y_0) eine lokale Maximalstelle von f.

(d) Angenommen, es existieren Funktionen $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $v : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass $f(x,y) = u(x) + v(y)$ für alle $x, y \in [0,1]$ gilt. Falls x_0 eine globale Minimalstelle von u und y_0 eine globale Minimalstelle von v ist, so ist (x_0,y_0) eine globale Minimalstelle von f.

Siehe nächstes Blatt!

6. Sei f eine *beliebige* differenzierbare Funktion einer Variablen. Zeigen Sie, dass alle Tangentialebenen der Fläche

$$z = y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right)$$

durch den Punkt $(0, 0, 0)$ gehen.

7. Der für beliebige Dreiecke ABC gültige Kosinussatz lautet $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Schätzen Sie den relativen Fehler von c ab, wenn die Grössen a und b auf 1% und γ auf $0.5°$ genau gemessen werden.

8. Gegeben ist die Funktion

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{y}{x^2 + y^2} \ .$$

a) Bestimmen Sie den (aufgrund der gegebenen Formel grösstmöglichen) Definitionsbereich sowie den (zugehörigen) Wertebereich von f .

b) Diskutieren Sie die Niveaulinien von f und zeichnen Sie für die Funktionswerte -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$ und 1 auf.

c) Ermittlen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt $(1, 1, \frac{1}{2})$.

9. Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) := xy\,(2x - 5y)$$

im abgeschlossenen Quadrat mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$,$(2, 0)$.

a) Verwenden Sie die Geogebra-App unter [1] um die Niveaulinien der Funktion anzuzeigen. Welche Arten von Extremalstellen kann man erkennen?

[1] `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/auth/nethz/geogebra/4.1_niveaulinien.html`

b) Berechnen Sie die globale Extremastellen von f in diesem Quadrat.