# Serie 16

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis *Mittwoch, 20.03.2019 um 08:15 Uhr* ab.

**Bemerkung:** Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

**Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben:** Mittwoch, 20.03.2019 in der Vorlesung.

**Homepage:** `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/`

---

**MC-Aufgaben (Online-Abgabe)**

**1.** Die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x(u,v) &= 2v, \\ y(u,v) &= -2u \end{aligned}$$

bildet Kreise auf Kreise ab.

(a) Wahr.

(b) Falsch.

**2.** Betrachten Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \int_0^x x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Welche der folgenden Integrale sind gleich $I$?

(a) $\int_0^1 \int_0^y y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

(b) $\int_0^1 \int_0^y x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

(c) $\int_0^1 \int_y^1 x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

**3.** Es sei $B$ ein Bereich in der $(x, y)$-Ebene und $\widetilde{B}$ der via Polarkoordinaten entsprechende Bereich in der $(\rho, \varphi)$-Ebene. Welchem Integral entspricht $\int_B xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$?

(a) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \rho^2 \sin\varphi \cos\varphi \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$

(b) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \rho^3 \sin\varphi \cos\varphi \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle\int_{\widetilde{B}} \rho^3 \sin\varphi \cos^2\varphi \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$

**4.** Es sei

$$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}F,$$

wobei $D$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, 1)$ bezeichne. Je nach Wahl des Koordinatensystems und der Reihenfolge der Integration lässt sich $I$ auf verschiedene Arten als zweifaches Integral ausdrücken. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \rho^2 \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$

(c) $\displaystyle I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

**5.** Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$x(u,v) = 2u + v,$$
$$y(u,v) = \ \ u - 3v.$$

**a)** Es bezeichne $\mathcal{R}$ das Einheitsquadrat in der $xy$-Ebene, also $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$. Skizzieren Sie den Bereich $\widetilde{\mathcal{R}}$ der $uv$-Ebene, der unter dieser Transformation entsteht.

**b)** Berechnen Sie die Einträge und die Determinante der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

**c)** Vergleichen Sie das Resultat aus (b) mit dem Verhältnis der Flächen von $\mathcal{R}$ und $\widetilde{\mathcal{R}}$.

**6.** Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : (x,y) \longmapsto f(x,y)$ in zwei Variablen ist der Laplace-Operator definiert als

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

Nach einer Koordinatentransformation nimmt der Laplace-Operator in polaren Koordinaten die Form

$$f \equiv \widetilde{f}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{f}_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}\widetilde{f}_{\varphi\varphi}, \tag{1}$$

wobei $\widetilde{f}(\rho,\varphi) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ die Funktion $f$ in polaren Koordinaten ist.

Sei nun $f : (x,y,z) \longmapsto f(x,y,z)$ eine zweimal differenzierbare Funktion in drei Variablen. Der Laplace-Operator von $f$ ist

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$$

**a)** Berechnen Sie $\Delta f$ für $f(x,y,z) = x^2 y + 2xz^{-1} + \sin(xz)$.

**b)** Wie kann man die Formel aus (1) erweitern, um $\Delta f$ in zylindrischen Koordinaten zu darstellen?

*Bemerkung*: Die zylindrische Koordinaten sind durch die Transformation

$$x(\rho,\varphi,z) = \rho\cos(\varphi), \quad y(\rho,\varphi,z) = \rho\sin(\varphi), \quad z(\rho,\varphi,z) = z,$$

gegeben, wobei $\rho > 0$, $\varphi \in [0, \pi/2]$ und $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

**c)** Berechnen Sie, unter Zuhilfenahme von Teil (b), $\Delta f$ für

$$f(x,y,z) = \frac{1}{z}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 2z\sqrt{x^2+y^2}$$

und $x, y, z > 0$.

**7.** **a)** Berechnen Sie

$$\iint_D x^2 y^2 \, \mathrm{d}F,$$

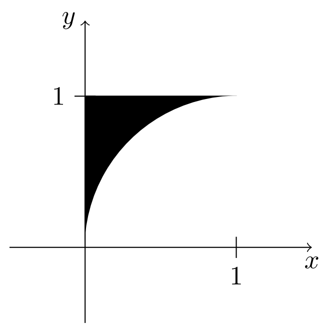
wobei $D$ das durch die Kurven $y = x^2$ und $y = 1$ eingeschlossene Gebiet bezeichnet.

**Bitte wenden!**

**b)** Berechnen Sie
$$\iint_D xe^{x+y}\,\mathrm{d}F,$$
wobei $D = [0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat bezeichnet.

**c)** Berechnen Sie
$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}F,$$
wobei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ den Einheitskreis bezeichnet.

**8.** Sei $S = \{(x,y) \in [0,1]^2 : (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}$.




Berechnen Sie den Schwerpunkt von $S$.