

## Serie 24

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, 22.05.2018 um 08:15 Uhr** ab.

**Bemerkung:** Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

**Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben:** Mittwoch, 22.05.2018 in der Schnellübung.

**Homepage:** <https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/>

---

### MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Gegeben seien Funktionen  $s, t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Welche aus den folgenden Bedingungen garantieren die Exaktheit der Differenzialgleichung  $s(x, y) = t(x, y) \cdot y'$ ?

- (a) Für alle  $(x, y)$ :  $s_y(x, y) = t_x(x, y)$ .
- (b) Für alle  $(x, y)$ :  $s_x(x, y) = t_y(x, y)$ .
- (c) Für alle  $(x, y)$ :  $s_y(x, y) = -t_x(x, y)$ .
- (d) Für alle  $(x, y)$ :  $s_x(x, y) = -\frac{1}{t_y(x, y)}$ .
- (e) Keine.

2. Welche aus den folgenden Gleichungen sind exakt?

- (a)  $e^x \sin y + 3y - (3x - e^x \sin y)y' = 0$ .
- (b)  $\left(\frac{y}{x} + 6x\right) + (\log x - 2)y' = 0, x > 0$ .
- (c)  $(y \log x + xy)y' = -x \log y - xy$ .
- (d)  $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}, a, b, c, d > 0$  Konstante.

3. Welche Aussagen über die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$x^2 + Cy^2 = 1$$

mit Scharparameter  $C$  sind korrekt?

- (a) Die  $y$ -Achse ist eine Orthogonaltrajektorie.
- (b) Alle Orthogonaltrajektorien, welche den Punkt  $(0, 0)$  nicht treffen, sind geschlossene Kurven.
- (c) Die Kurven der Form  $y^2 + x^2 - \ln|x| = K$  mit  $K \geq 1$  sind Orthogonaltrajektorien.
- (d) Die Kurven der Form  $y^2 + x^2 - \ln(x^2) = K$  mit  $K \geq 1$  sind Orthogonaltrajektorien.

4. Die Funktion  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei das Potential eines Vektorfelds  $\vec{v} = \text{grad } g$ . In welcher Beziehung stehen die Niveaulinien von  $g$  mit den Feldlinien von  $\vec{v}$ ?

- (a) Die Niveaulinien von  $g$  und die Feldlinien von  $\vec{v}$  sind (abgesehen von der Orientierung) gleich.
- (b) Die Niveaulinien von  $g$  und die Feldlinien von  $\vec{v}$  sind Orthogonaltrajektorien voneinander.
- (c) Es gibt keinen Zusammenhang dieser Art.

**Siehe nächstes Blatt!**

5. Bestimmen Sie die Kurvenschar der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y^2 \cdot (y')^2 + y^2 - 1 = 0, \quad y = y(x) > 0$$

sowie ihre Enveloppen.

6. Bestimmen Sie die Orthogonaltrajektorien der Kurvenschar

$$\frac{y-1}{x-1} = C.$$

Skizzieren Sie diese Trajektorien.

7. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y - xy' = \sqrt{(y')^2 + 1}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine und die singuläre Lösung. Welche geometrische Form hat die Enveloppe der Lösungsschar?

8. Seien  $P$  und  $Q$  Punkte auf den Winkelhalbierenden des ersten bzw. zweiten Quadranten. Berechnen Sie die Enveloppe der Schar der Geraden  $\overline{PQ}$ , für die die Summe der Längen

$$PO + QO = 2\sqrt{2}$$

ist. ( $O$  ist der Koordinatenursprung.)

