

## Serie 26

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, 05.06.2019 um 08:15 Uhr** ab.

**Bemerkung:** Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

**Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben:** Mittwoch, 05.06.2019, im Fächli Ihres Hilfsassistenten im Raum HG J 68.

**Homepage:** <https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/>

---

### MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Es ist das folgende autonome System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + 3 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2\end{aligned}$$

von linearen Differenzialgleichungen 1. Ordnung gegeben. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

- (a) Es gibt keinen Gleichgewichtspunkt.
- (b)  $(0, 0)$  ist Gleichgewichtspunkt.
- (c)  $(1, -2)$  ist Gleichgewichtspunkt.
- (d)  $(-1, 2)$  ist Gleichgewichtspunkt.

2. Betrachten Sie das folgende System

$$\begin{cases} \dot{x} = bx - y \\ \dot{y} = x - by. \end{cases}$$

Für  $b = 1$  ist die Lösung zu den Anfangsbedingungen  $x(0) = 1, y(0) = 0$  gleich...

(Hinweis: Betrachten Sie  $u(t) = x(t) + y(t), v(t) = x(t) - y(t)$ .)

- (a)  $x(t) = e, y(t) = te^t$
- (b)  $x(t) = t + 1, y(t) = t$
- (c)  $x(t) = t, y(t) = t$
- (d)  $x(t) = e^t, y(t) = te^t$

3. Für die Lösung  $(x(t), y(t))$  des Systems

$$\begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 4x, \\ \dot{x} - \dot{y} = 6y, \end{cases}$$

welche die Anfangsbedingungen  $x(0) = 1$  und  $y(0) = 0$  erfüllt, gilt

- (a)  $x(1) + y(1) = 2e^3$ .
- (b)  $2x(1) + y(1) = 2e^3$ .
- (c)  $x(1) + 2y(1) = 2e^3$ .
- (d)  $x(1) + y(1) = e^3$ .

4. Bestimmen Sie alle  $s \in \mathbb{R}$ , so dass im folgenden System  $(0, 0)$  ein Gleichgewichtspunkt ist:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + \frac{1}{4}y \\ \dot{y} = sx - y. \end{cases}$$

- (a)  $s \leq 0$
- (b)  $s \leq 4$
- (c)  $0 \leq s \leq 4$

**Siehe nächstes Blatt!**

5. Welche der folgenden Aussagen über die Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0$$

sind korrekt?

- (a) Für eine Potenzreihe  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , die die Gleichung löst, gilt  $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$  für  $n \geq 0$ .
- (b) Die eindeutige Lösung mit  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  ist eine gerade Funktion, dh.  $y(-x) = y(x)$ .
- (c) Die eindeutige Lösung mit  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  ist  $y(x) = e^{-x^2/2}$ .
- (d) Jede Lösung  $y$  erfüllt entweder  $y(-x) = y(x)$  oder  $y(-x) = -y(x)$ .

6. Die folgende Differentialgleichung beschreibt die Funktion  $t \rightarrow \varphi(t)$  der Winkelverschiebung eines Pendels:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin(\varphi) = 0, \quad (1)$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung und  $\ell$  die Länge des Pendels bezeichnen. Approximieren wir  $\sin(\varphi)$  durch  $\varphi$ , so erhalten wir die folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0 \quad (2)$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) (2) ist die Differentialgleichung einer ungedämpften Schwingung.
- (b) Die Lösung von (2) mit den Anfangsbedingungen  $\varphi(0) = \varphi_0$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$  ist periodisch und die Periode ist unabhängig von  $\varphi_0$ .
- (c) Jede Lösung von (2) ist periodisch und die Periode ist unabhängig von  $\ell$ .
- (d) Die Lösungen von (1) und (2) mit den Anfangsbedingungen  $\varphi(0) = \varphi_0$  und  $\dot{\varphi}(0) = 0$  gleichen einander mehr wenn  $\varphi_0 = \pi/100$  als wenn  $\varphi_0 = \pi/2$  ist.

**Bitte wenden!**

7. Lösen Sie die Differentialgleichungssysteme

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x - 3y \\ x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \dot{x} &= -7x + 4y \\ \dot{y} &= -9x + 5y + e^{-t} \\ x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \dot{x} &= 2x - y \\ \dot{y} &= x + 2y \end{cases}$$

8. Für folgende Differentialgleichungssysteme bestimmen Sie das Phasenporträt. Erstellen Sie eine Skizze inklusive des Durchlaufsinns der Kurven.

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} &= x \\ \dot{y} &= x^2 + y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} \dot{x} &= 2x \\ \dot{y} &= \frac{x}{y} \end{cases}$$

9. Finden Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t)^2 + y(t)^2 - 1 \\ \dot{y}(t) &= x(t)^2 - y(t)^2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie, welche Gleichgewichtspunkte stabil sind.

*Hinweis:* Betrachten Sie für die Stabilität das linearisierte System.

10. Bestimmen Sie das Taylorpolynom 6. Ordnung der Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + xy'(x) + x^2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

11. Finden Sie eine Rekursionsformel für die Taylor-Koeffizienten  $a_n$  der Lösung  $y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  des Anfangswertproblems

$$y''(x) + x^3y(x) = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

und bestimmen Sie  $a_0, a_1, \dots, a_{10}$ .