Hinweise und Tipps zur Serie 21:

- Definitionen:
  - Ein Vektorfeld $\vec{v}$ ist *konservativ*, wenn das Arbeitsintegral $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$ nur vom Startpunkt P und vom Endpunkt Q abhängt, aber nicht von W selbst.
  - $\vec{v}$ ist ein *Potentialfeld*, wenn es ein Skalarfeld f mit $\vec{v} = \operatorname{grad} f$ gibt.
  - Eine Menge M in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist *einfach zusammenhängend*, wenn sich jeder geschlossene Weg so auf einen Punkt zusammenziehen lässt, dass dabei M nicht verlassen werden muss.

- Wichtige Sätze:
  1. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv \vec{0}$.
  2. Satz von Stokes: Wenn $W = \partial S$ der Rand einer Fläche S ist, die komplett im Definitionsbereich eines Vektorfelds $\vec{v}$ liegt, und W bezüglich des Normaleneinheitsvektors $\vec{n}$ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, gilt
  $$\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} dO.$$
  3. $\vec{v}$ ist konservativ
  $\iff \int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ für alle geschlossenen Wege W
  $\iff \vec{v}$ ist ein Potentialfeld
  $\implies \operatorname{rot} \vec{v} \equiv \vec{0}$.
  Wenn $D(\vec{v})$ dazu auch einfach zusammenhängend ist, folgt aus $\operatorname{rot} \vec{v} \equiv \vec{0} \implies \vec{v}$ Potentialfeld und damit auch die anderen Aussagen.
  4. Wenn $\vec{v}$ konservativ ist, kann man ein $P_0 \in \mathbb{R}^3$ fixieren und definieren:
  $$f(Q) = \int_{P_0}^{Q} \vec{v} \cdot d\vec{r}.$$
  Dann ist $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

- Zu Aufgabe 6: Wenn S und $\tilde{S}$ zwei Flächen mit dem gleichen Rand $\partial S = \partial \tilde{S}$ sind, dann gilt gemäss Satz von Stokes:
$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dO = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial \tilde{S}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\partial \tilde{F}} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dO.$$
Wählen Sie also eine geeignete Fläche $\tilde{S}$, so dass das Flussintegral durch $\tilde{S}$ leichter zu rechnen ist! Wie muss die Parametrisierung $\vec{r}(u,v)$ aussehen, damit $\iint_B \operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dudv$ einfach wird?

- Zu Aufgabe 7: Die Kugelkoordinaten sind
$$\vec{s}(u,v) = \begin{pmatrix} \sin u \cos v \\ \sin u \sin v \\ \cos \end{pmatrix}, (u,v) \in [0,\pi] \times [0, 2\pi].$$
Gegeben u, v ist ein Weg vom Ursprung zur Kugeloberfläche also gegeben durch $\vec{r}(t) = t \cdot \vec{s}(u,v)$ mit $t \in [0,1]$. Dann ist $\dot{\vec{r}} = \vec{s}(u,v)$. Die Arbeit $A(u,v)$ berechnet sich so durch
$$A(u,v) = \int_0^1 \vec{v}(t \cdot \vec{s}(u,v)) \cdot \vec{s}(u,v) dt.$$
Für welche $(u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$ ist dieser Ausdruck minimal? Extrema mit Randbedingung gemäss Kapitel IV! Beachten Sie, dass $\vec{s}(u,v)$ für $u = 0$ oder $u = \pi$ unabhängig von v ist, um die Rechnung zu verkürzen.

- Zu Aufgabe 8: Eine allgemeine Parabel hat die Form $P(x) = cx^2 + dx + e$. Die Bedinungen hier zeigen schnell, dass $P_a(x) = cx^2 + 1$ gelten muss, aber was ist c?

  Die Parametrisierung $\vec{r}(t)$ eines Wegs W ergibt sich dann aus den Koordinaten t und $P_a(t)$, und damit wird die Arbeit von $(0,1)$ bis (a,a) entlang W zu

  $$A(a) := \int_0^a \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt = \dots$$

  Minimieren nach a ergibt sich dann wie üblich durch die Ableitung: $A'(a) = 0 \Rightarrow \dots$

- Zu Aufgabe 9: Der dritte mathematische Satz oben gibt die Formel für f an. Hier ist also $P_0 = (1,0,0)$ und $Q = (x,y,z)$, also $\overrightarrow{P_0Q} = (x-1,y,z)$. Den Weg von P nach Q ist dann gegeben durch $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP_0} + t \cdot \overrightarrow{P_0Q}$ mit $t \in [0,1]$. (Wieso?)

- Zu Aufgabe 10: a) löst man wie 9., bei b) kann man direkt einsetzen. In c) sieht $\vec{v}$ sehr kompliziert aus! Vielleicht lässt sich $\vec{v}$ einfacher als Potential beschreiben?