Lösung - Schnellübung 8

1. Finden Sie eine Funktion $f:(x,y) \longmapsto f(x,y)$, die folgenden Bedingungen genügt

$$f_{xy} = 1\,, \quad f(x,1) = x^3\,, \quad f(0,y) = e^{y-1} - 1\,.$$

Lösung: Aus $f_{xy} = 1$ folgt (durch Integration nach y) $f_x(x,y) = y + v(x)$, wobei v eine Funktion von x ist. Damit gilt (Integration nach x)

$$f(x,y) = xy + \underbrace{\int v(x)\ dx}_{=:A(x)} + b(y)\,, \tag{1}$$

wobei b eine Funktion von y und A eine Funktion von x ist.
Aus $f(x,1) = x^3$ erhält man

$$x^3 = x + A(x) + b(1)\,. \tag{2}$$

Setze $x = 0$ in (2), wir erhalten $-b(1) = A(0)$. Eingesetzt in (2) ergibt

$$A(x) = x^3 - x + A(0)\,. \tag{3}$$

Aus $f(0,y) = e^{y-1} - 1$ folgt $e^{y-1} - 1 = A(0) + b(y)$, folglich gilt

$$b(y) = e^{y-1} - 1 - A(0)\,. \tag{4}$$

Setze (3) und (4) in (1) ein, man erhält

$$f(x,y) = xy + x^3 - x + A(0) + e^{y-1} - 1 - A(0) = xy + x^3 - x + e^{y-1} - 1.$$

Dies ist die Funktion mit den gewünschten Eigenschaften.

2. Die Gleichung $z = 2y^2 + x^2$ beschreibt eine Fläche S im dreidimensionalen Raum, welche den Punkt $P = (1,1,3)$ enthält. Man finde die Koordinaten des anderen Punktes von S, der auf der Normalen zu S in P liegt.

Lösung: Setzen wir $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z$. Die Fläche S ist dann die Niveaufläche $f(x,y,z) = 0$. Die zu S normale Richtung $\vec{n}(x,y,z)$ im Punkt (x,y,z) ist durch

$$\text{grad } f = (2x, 4y, -1)$$

gegeben; in $P = (1,1,3)$ gilt damit $\vec{n}(P) = (2,4,-1)$. Die Normale g zu S in P ist somit gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Es bleibt nur noch, der zweite Punkt in $g \cap S$ zu berechnen: aus

$$(1+2t)^2 + 2(1+4t)^2 - 3 + t = 21t + 36t^2 = 0$$

folgt $t = 0$ oder $t = -\frac{21}{36} = -\frac{7}{12}$. Für $t = 0$ erhalten wir P, und der gesuchte Schnittpunkt ist

$$P' = \left(-\frac{1}{6}, -\frac{4}{3}, \frac{43}{12}\right) \quad .$$

Bitte wenden!

3. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $(x,y) \mapsto 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x - 4y + 4$ gegeben. Finden Sie die globalen Extrema auf der Kreisscheibe

$$B = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Lösung: Zunächst berechnen wir die partiellen Ableitungen von f:

$$f_x = 6x - 2y - 4, f_y = -2x + 6y - 4.$$

An einer Extremalstelle gilt $f_x = f_y = 0$. Dies gibt ein lineares Gleichungssystem

$$6x - 2y = 4, -2x + 6y = 4$$

mit Lösung $x = 1, y = 1$. Da $(1,1)$ nicht in B enthalten ist müssen wir nur die Extrema auf dem Rand der Kreisscheibe betrachten. Wir parametrisieren den Rand mit

$$s(\phi) = (\cos(\phi), \sin(\phi)).$$

Einsetzen und verwenden von $\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi) = 1$ gibt

$$\begin{aligned}(f \circ s)(\phi) &= 3\cos^2(\phi) - 2\cos(\phi)\sin(\phi) + 3\sin^2(\phi) - 4\cos(\phi) - 4\sin(\phi) + 4 \\ &= 3 - 2\cos(\phi)\sin(\phi) - 4\cos(\phi) - 4\sin(\phi) + 4.\end{aligned}$$

Für die Extremstellen leiten wir nach ϕ ab und bestimmen die Nullstellen.

$$\begin{aligned}(f \circ s)_\phi &= -2(\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi)) + 4\sin(\phi) - 4\cos(\phi) \\ &= -2(\cos(\phi) - \sin(\phi)) \cdot (\cos(\phi) + \sin(\phi) + 2) = 0\end{aligned}$$

Der Term $\cos(\phi) + \sin(\phi) + 2$ kann nie verschwinden, da $\sin$ und $\cos$ grösser gleich -1 sind und nie gleichzeitig -1 werden. Deshalb ist die Ableitung genau dann 0 falls $\cos(\phi) = \sin(\phi)$. Dies ist genau für $\phi = \pi/4$ und $\phi = 5\pi/4$ erfüllt, denn die Bedingung entspricht Punkten auf dem Einheitskreis, deren x und y-Koordinate übereinstimmen. Da wir wissen, dass auf der Scheibe B ein Minimum und Maximum existieren müssen und da wir nur zwei Kandidaten haben, müssen diese bereits ein Minimum und Maximum sein.

Wir erhalten

$$p_{\min} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad f(p_{\min}) = 6 - 4\sqrt{2}, \tag{5}$$

$$p_{\max} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad f(p_{\max}) = 6 + 4\sqrt{2}. \tag{6}$$

4. Aus einer Funktion einer Variablen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $\rho \mapsto f(\rho)$, entsteht durch Einsetzen von $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Funktion dreier Variablen

$$\widetilde{f}\colon (x,y,z) \mapsto f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{grad} \widetilde{f} = \frac{f'(\rho)}{\rho} \cdot \vec{\rho}$$

gilt, wobei $\vec{\rho} = (x,y,z)$ ist.

Siehe nächstes Blatt!

b) Bestimmen Sie f derart, dass $f(1) = 0$ und

$$\operatorname{grad} \widetilde{f} = \frac{\vec{\rho}}{\rho^5}$$

gilt.

Lösung:

a) Man berechnet

$$\frac{\partial}{\partial x}\widetilde{f} = \frac{\partial}{\partial x} f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{d}{d\rho} f(\rho) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = f'(\rho)\frac{x}{\rho}$$

und analog für die anderen Komponenten von grad $\widetilde{f}$. Die Behauptung folgt unmittelbar.

b) Aus (a) muss also

$$\frac{f'(\rho)}{\rho} = \frac{1}{\rho^5} \quad \text{mit} \quad f(1) = 0$$

gelten. Integrieren führt zu $f(\rho) = -\dfrac{1}{3\rho^3} + c$, und aus $f(1) = 0$ folgt schliesslich

$$f(\rho) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\rho^3}.$$

5. Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Jedes Doppelintegral unten ergibt sich aus der Berechnung des Gebietsintegrales von f über ein gegebenes Gebiet S.

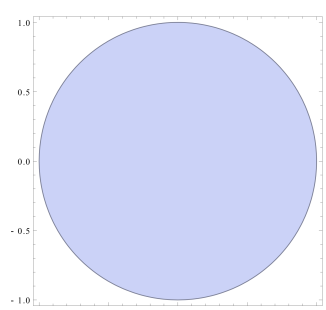
a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\int_{-\sin(x/2)}^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

Skizzieren Sie jeweils das Gebiet S und vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge.

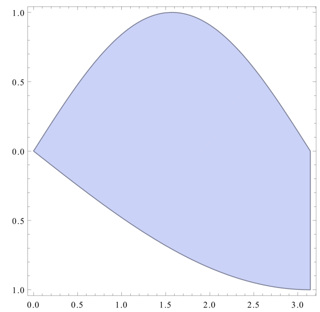
Lösung:

a) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$



b) $\int_{-1}^{0}\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{1}\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Bitte wenden!



1.0
0.5
0.0
0.5
1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0