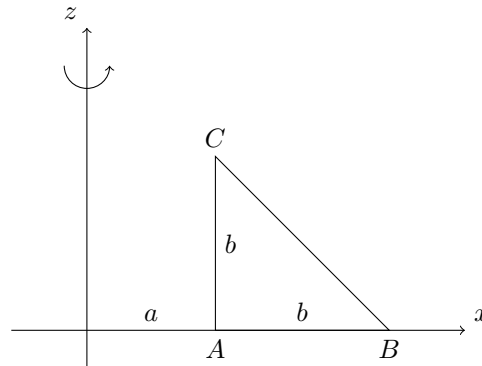


Lösung - Schnellübung 9

1. Berechnen Sie das Trägheitsmoment um die z -Achse des homogenen Ringes (Dichte $\rho = 1$), der durch Rotation des Dreiecks ABC um die z -Achse entsteht (siehe untenstehende Figur).

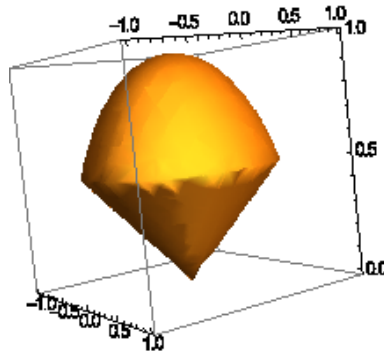


Lösung: Das Trägheitsmoment ist gegeben durch $I_z = \int \int \int_V x^2 + y^2 dV$. Wir berechnen das Integral mit den zylindrischen Koordinaten. Die Gerade durch B und C ist gegeben durch $g(x) = a + b - x$, daraus folgt

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_a^{a+b} \int_0^{a+b-r} r^2 \cdot r dz dr d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_a^{a+b} (a+b-r)r^3 dr d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{(a+b)r^4}{4} - \frac{r^5}{5} \right]_{r=a}^{r=a+b} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{(a+b)^5}{4} - \frac{(a+b)^5}{5} - \frac{(a+b)a^4}{4} + \frac{a^5}{5} \right) d\phi \\ &= 2\pi \left(\frac{(a+b)^5}{20} - \frac{a^5}{20} - \frac{a^4 b}{4} \right) = \pi \left(\frac{ab^4}{2} + a^2 b^3 + a^3 b^2 + \frac{b^5}{10} \right). \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie das Volumen der Eistüte, welche durch den Kegel $x^2 + y^2 = 3z^2$ und die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ beschränkt wird und sich oberhalb der xy -Ebene befindet.

Lösung: $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3z^2\}$



Die beiden Flächen treffen sich bei

$$3z^2 = x^2 + y^2 = 1 - z^2 \Rightarrow 4z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm \frac{1}{2}.$$

Variante mit Kugelkoordinaten $(x, y, z) = (\rho \cos \varphi \sin \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \theta)$:

$$\begin{aligned} |V| &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\pi \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Variante mit Zylinderkoordinaten $(x, y, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$: Setze

$$V_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}z\}$$

$$V_2 = \{(x, y, z) \mid \frac{1}{2} \leq z \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq \sqrt{1-z^2}\}$$

Dann

$$|V_1| = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}z} \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} 3z^2 \, dz = \frac{\pi}{8}$$

$$|V_2| = \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-z^2) \, dz = \pi \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 8} \right) \right) = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{3 \cdot 8} \right)$$

$$|V| = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{3 \cdot 8} + \frac{1}{8} \right) = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3 \cdot 8} \right) = \frac{\pi}{3}$$

3. Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ein Vektorfeld. Die Divergenz $\operatorname{div} \vec{v}$ ist definiert als

$$\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = \frac{\partial v_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial v_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) = \nabla \cdot \vec{v}(x, y, z)$$

Siehe nächstes Blatt!

und die Rotation $\text{rot } \vec{v}$ als

$$\text{rot } \vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{v}(x, y, z),$$

wobei $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ den Nabla-Operator bezeichnet.

a) Beweisen Sie die Identität $\text{div rot } \vec{v} = 0$.

b) Zeigen Sie weiters: Ist f eine Funktion, so ist

$$\text{div grad } f = \Delta f,$$

wobei (wie bekannt) $\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ ist.

c) Beweisen Sie die Identität

$$\text{rot rot } \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Wir schreiben $\frac{\partial v_i}{\partial x} = \partial_x v_i$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \vec{v} &= \text{div} \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} \\ &= \partial_x(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) + \partial_y(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) + \partial_z(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) \\ &= \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned}$$

b) $\text{div grad } f = \text{div} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \partial_x(\partial_x f) + \partial_y(\partial_y f) + \partial_z(\partial_z f) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}.$

c)

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{v} &= \text{rot} \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) - \partial_z(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) \\ \partial_z(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) - \partial_x(\partial_x v_2 - \partial_y v_1) \\ \partial_x(\partial_z v_1 - \partial_x v_3) - \partial_y(\partial_y v_3 - \partial_z v_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_y \partial_x v_2 - \partial_y \partial_y v_1 - \partial_z \partial_z v_1 - \partial_z \partial_x v_3 + (\partial_x \partial_x v_1 - \partial_x \partial_x v_1) \\ \partial_z \partial_y v_3 - \partial_z \partial_z v_2 - \partial_x \partial_x v_2 - \partial_x \partial_y v_1 + (\partial_y \partial_y v_2 - \partial_y \partial_y v_2) \\ \partial_x \partial_z v_1 - \partial_x \partial_x v_3 - \partial_y \partial_y v_3 - \partial_y \partial_z v_2 + (\partial_z \partial_z v_3 - \partial_z \partial_z v_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) \\ \partial_y(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) \\ \partial_z(\partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x v_1 + \partial_y \partial_y v_1 + \partial_z \partial_z v_1 \\ \partial_x \partial_x v_2 + \partial_y \partial_y v_2 + \partial_z \partial_z v_2 \\ \partial_x \partial_x v_3 + \partial_y \partial_y v_3 + \partial_z \partial_z v_3 \end{pmatrix} \\ &= \text{grad div } \vec{v} - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. a) Es sei $\vec{v}(x, y, z) = (z - y, x + z, -x - y)$. Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{v}$ und $\operatorname{rot} \vec{v}$.
- b) Es sei $\vec{v}(x, y, z) = (3y, -xz, yz^2)$. Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{v}$ und $\operatorname{rot} \vec{v}$.
- c) Zeigen Sie, dass für zwei differenzierbare Vektorfelder \vec{w}_1 und \vec{w}_2 gilt:

$$\operatorname{div}(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2) + \vec{w}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{w}_2 = \vec{w}_2 \cdot \operatorname{rot} \vec{w}_1.$$

Lösung:

- a) $\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = (-2, 2, 2)$.
- b) $\operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) = 2yz$ und $\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = (z^2 + x, 0, -z - 3)$.
- c) Es seien $\vec{w}_1 = (w_{11}, w_{12}, w_{13})$ und $\vec{w}_2 = (w_{21}, w_{22}, w_{23})$. Die linke Seite ist dann gleich

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \begin{pmatrix} w_{12}w_{23} - w_{22}w_{13} \\ w_{13}w_{21} - w_{11}w_{23} \\ w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ w_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (w_{23})_y - (w_{22})_z \\ (w_{21})_z - (w_{23})_x \\ (w_{22})_x - (w_{21})_y \end{pmatrix} \\ = (w_{12})_x w_{23} - w_{22} (w_{13})_x + (w_{13})_y w_{21} - (w_{11})_y w_{23} + (w_{11})_z w_{22} - (w_{12})_z w_{21}, \end{aligned}$$

die rechte gleich

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w_{21} \\ w_{22} \\ w_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (w_{13})_y - (w_{12})_z \\ (w_{11})_z - (w_{13})_x \\ (w_{12})_x - (w_{11})_y \end{pmatrix} \\ = (w_{12})_x w_{23} - w_{22} (w_{13})_x + (w_{13})_y w_{21} - (w_{11})_y w_{23} + (w_{11})_z w_{22} - (w_{12})_z w_{21}. \end{aligned}$$

5. a) Gibt es ein Vektorfeld \vec{v} mit $\operatorname{rot} \vec{v}(x, y, z) = (x, y, z)$?
- b) Gibt es ein Vektorfeld \vec{w} , für das

$$\operatorname{rot} \vec{w} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

gilt?

Lösung:

- a) Nein, da $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 3 \neq 0$ ist.
- b) Ja. Ein mögliches Vektorfeld ist

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \end{pmatrix}.$$