Schnellübung 11

Bemerkung: Diese Schnellübung wird am Mittwoch, dem 08.05.2019, während der Übungsstunde gelöst.

1. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \big(2xy + 3, x^2 - 4z, -4y\big)\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{v}$ konservativ ist.

b) Finden Sie eine Funktion f, so dass $\vec{v} = \mathbf{grad} f$.

c) Berechnen Sie

$$\int_C \vec{v} \cdot d\vec{r},$$

wobei C ein beliebiger Weg ist, der die Punkte $(3, -1, 2)$ und $(2, 1, -1)$ verbindet.

2. Bestimmen Sie das Potential f des Coulombfelds

$$\vec{v}(\vec{r}) = -C\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

auf dem Gebiet $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

3. Lösen Sie Differenzialgleichung

$$1 - x^2 + y^2 = 2xyy'$$

mit Hilfe der Substitution $u(x) = (y(x))^2$.

Bitte wenden!

4. Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

a)

$$\begin{cases} y' - 3y = e^{2x}, & x \in (-\infty,\, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} xy' - 2y = x^5, & x \in (0,\, \infty) \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} y' + y\, \tan x = \sin 2x, & x \in (-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 4xy = (1+x^2)^{-2}, & x \in (-\infty,\, \infty) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

5. Finden Sie alle Kurven, gegeben durch $y = y(x)$, welche die folgende Bedingung erfüllen: Es sei t die Tangente im Punkt P der Kurve und Q ihr Schnittpunkt mit der y–Achse. Dann liegt der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ auf der Geraden, gegeben durch $y = x$.