Serie 18

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, 03.04.2019 um 08:15 Uhr. Uhr** ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Mittwoch, 03.04.2019 in der Vorlesung.

Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Klicken Sie die wahren Aussage an.

(a) Der Operator $\operatorname{div}(\cdot)$ ordnet einem Vektorfeld $\vec{v}$ ein Skalarfeld $\operatorname{div}\vec{v}$ zu.

(b) $\operatorname{div}\vec{v} = \left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x}, \dfrac{\partial v_2}{\partial y}, \dfrac{\partial v_3}{\partial z}\right)$

(c) $\operatorname{div}\vec{v}$ des Coulombfeldes $\vec{v}$ ist Null.

(d) Der Operator $\operatorname{grad}(\cdot)$ ordnet einem Skalarfeld f ein Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ zu.

(e) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v}$ ist eine zulässige Bildung.

2. Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon (x,y,z) \mapsto \left(xz^{\alpha}r,\; yz^{\beta}r,\; z^2r^3\right) \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Für welche Konstanten α und β ist $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$?

(a) $\alpha = 0$ und $\beta = 0$.

(b) $\alpha = 1$ und $\beta = 3$.

(c) $\alpha = 3$ und $\beta = 2$.

(d) $\alpha = 3$ und $\beta = 3$.

3. Klicken Sie die richtigen Aussagen an.

(a) $\operatorname{div}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

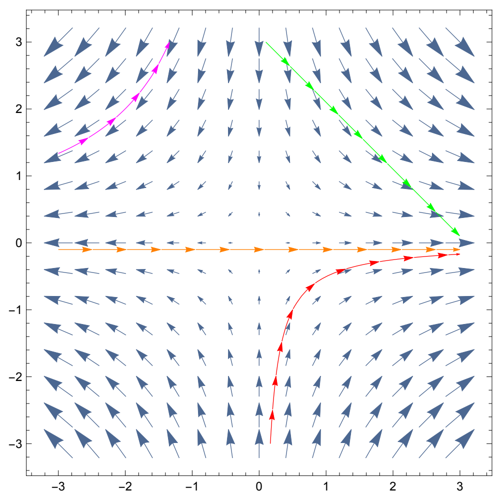
(b) $\operatorname{grad}(x+y+z) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

(c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(x+y+z)) = 0$

(d) $\operatorname{rot}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

(e) $\operatorname{div}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 3$

4. Welche der folgenden Kurven sind Feldlinien des Vektorfeldes $\vec{v}(x,y) = (x,-y)$?



(a) Die grüne Kurve.

(b) Die rote Kurve.

(c) Die orange Kurve.

(d) Die pinke Kurve.

Hinweis: Benutzten Sie die Geogebra-App unter folgendem Link

`https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/auth/nethz/geogebra/6.2_operatoren.html`

um Vektorfelder, div und rot zu visualisieren.

Siehe nächstes Blatt!

5. Es seien a und c Konstanten. Das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = c\left(1 - a^2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, -a^2\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, 0\right)$$

beschreibt die Strömung einer idealen Flüssigkeit um einen Zylinder vom Radius a, dessen Achse mit der z-Achse zusammenfällt (siehe dazu die Abbildung und eine animierte Visualisierung unter folgendem Link: `https://tinyurl.com/ethanalysis-laminarflow`).

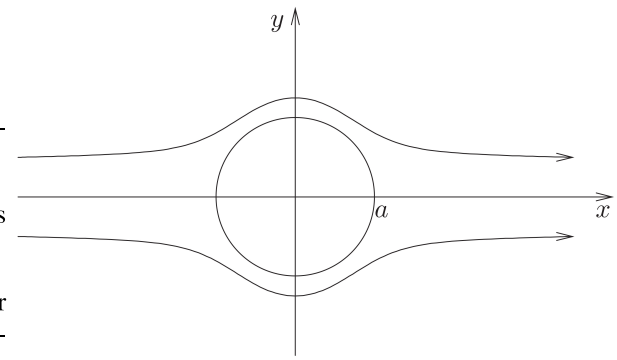
a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ und

b) dass $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ gilt,

c) dass an der Oberfläche des Zylinders die Strömung tangential verläuft und

d) dass in grosser Entfernung vom Zylinder das Vektorfeld nahezu homogen ist.

e) Bestimmen Sie weiters die Punkte maximaler und minimaler Geschwindigkeit auf der Zylinderoberfläche.



6. Gegeben ist das zweidimensionale Vektorfeld $\vec{v}(x,y) = \big(x^2-y^2, 2xy\big)$. Zeigen Sie, dass die Kreise, welche die x-Achse im Ursprung berühren, Feldlinien sind und bestimmen Sie die Koordinaten der zugehörigen Kreismittelpunkte.

7. Ein ebenes Vektorfeld $K(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ wird *harmonisch* genannt, falls

$$\operatorname{div} K = P_x + Q_y = 0 \text{ und } \operatorname{rot} K = Q_x - P_y = 0.$$

Ferner bezeichne K_α das Feld, das entsteht, wenn jeder Feldvektor eines Feldes K um den Winkel α gedreht wird.

Das Feld K sei harmonisch. Zeigen Sie, dass dann auch K_α harmonisch ist.

Hinweis: Ist (x,y) ein Punkt in der Ebene, so berechnet sich der um den Winkel α gedrehte Punkt durch

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

8. Eine Gerade geht durch den Punkt $(1,0,0)$ und hat den Richtungsvektor $(0,1,1)$. Lässt man sie um die z-Achse rotieren, so erzeugt sie eine Fläche *(einschaliges Rotationshyperboloid)*.

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Fläche an.

b) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Fläche.

c) In welchen Punkten der Fläche ist der Normalenvektor parallel zur Richtung des Vektors $(1,1,-1)$?

d)[1] Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks zwischen den Ebenen $z=0$ und $z=2$.

[1] Sie werden am 29. März in der Vorlesung anschauen, wie man den Oberflächeninhalt eines durch eine Parameterdarstellung gegebenen Flächenstucks berechet.