D-MAVT/D-MATL | Analysis II | FS 2019
Dr. Andreas Steiger

Serie 21

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Montag, 29.04.2019 um 08.15 Uhr** ab.

Bemerkung: Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben: Montag, 29.04.2019 in der Vorlesung.

Homepage: `https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/`

MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Welches der folgenden Vektorfelder hat ein Potential auf $\mathbb{R}^2$?

(a) $(x-y,\, x-y)$

(b) $(x^2-y,\, x^3+2xy)$

(c) $(x^3+2xy,\, x^2-y)$

(d) $(x^3-xy^2,\, x^2y-y^5)$

2. Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld auf $D \subset \mathbb{R}^3$, sodass

$$\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

für alle geschlossene Wege W in D. Was folgt?

(a) Die Arbeit $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r}$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt von W ab.

(b) $\operatorname{rot} \vec{v} = (0,0,0)$

(c) $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

(d) $\int_W \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$ für alle Wege W.

(e) Es existiert eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, sodass $\vec{v} = \operatorname{grad} f$.

Bitte wenden!

3. Wie gross ist die Arbeit, welche das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(x^2 + z^2, 4y - z, 2xz + 2y\right)$$

entlang des Einheitskreises γ in der (y, z)–Ebene leistet? (Der Durchlaufsinn von γ bilde mit der x–Achse eine Rechtsschraube, schaut man also entlang der positiven Richtung der x-Achse, so wird γ im Uhrzeigersinn durchlaufen.)

(a) π.

(b) 3π.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

(d) 0.

4. Für welche a ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\ln\left(1 + x^2\right) + ay^2, xy + y^2, z^3\right)$$

von der Form $\vec{v} = \mathbf{grad} f$ für eine gewisse Funktion $f = f(x, y, z)$ (die man nicht zu bestimmen braucht)?

(a) $a = 0$.

(b) $a = -1/2$.

(c) $a = 1/2$.

(d) $a = 1/2$ und $a = -1/2$.

(e) Es gibt kein solches a, da der Definitionsbereich von $\vec{v}$ nicht einfach zusammenhängend ist.

5. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind einfach zusammenhängend?

(a) Hohlkugel $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

(b) Gefüllter Torus

(c) $\mathbb{R}^3 \setminus x-$Achse

(d) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 2, 3)\}$

(e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq 1\}$

Siehe nächstes Blatt!

6. **a)** Berechnen Sie das Integral $\Phi = \iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\mathcal{O}$, wobei $\vec{F}(x, y, z) = (yz, -xz, xy)$ ist und

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 8z^2 = 1, z \geq 0\},$$

einen Teil der Oberfläche des Ellipsoids bezeichnet. Die Normale zeigt nach oben.

Benutzen Sie dazu den Satz von Stokes zweimal (einmal in jede Richtung), um das Integral über die Fläche S in ein Integral über eine Fläche $\widetilde{S}$ umzuformen, welches einfacher zu berechnen ist.

b) Benutzen Sie den Satz von Stokes, um Φ via Wegintegral zu berechnen.

7. Gegeben ist das Vektorfeld $\vec{v}(x, y, z) = \big(y^2 z, xyz, 2xy^2\big)$.
Vom Nullpunkt des Koordinatensystems aus ist auf einem geradlinigen Weg W die Oberfläche der Einheitskugel zu erreichen. Finde alle Endpunkte des Wegs, so dass die Arbeit entlang W maximal ist.

8. Für $a > 0$ sei P_a die Parabel mit Achse y und Scheitelpunkt $(0, 1)$, die durch den Punkt (a, a) geht. Sei γ_a der Weg von $(0, 1)$ nach (a, a) entlang P_a. Bestimmen Sie $a > 0$ so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$\vec{v} : (x, y) \longmapsto \left(\frac{y - 1}{x}, \frac{-1}{x} \right)$$

entlang γ_a minimal wird.

9. Wir betrachten das wirbelfreie Vektorfeld (Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters, vgl. Kap. VI, S. 14)

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

aber jetzt nur im Halbraum $x > 0$. Dieser Definitionsbereich ist einfach zusammenhängend. Also besitzt $\vec{v}$ darin ein Potential f.

a) Berechnen Sie f durch Bestimmung der Arbeit von $\vec{v}$ vom Punkt $(1, 0, 0)$ zum Punkt (x, y, z) längs eines geeigneten Weges.

b) Verifizieren Sie, dass $\mathbf{grad}\, f = \vec{v}$ ist.

10. **a)** Berechnen Sie das Potential des Kraftfeldes $(x + z^2, yz, \frac{y^2}{2} + 2xz)$. Wie gross ist die verrichtete Arbeit, wenn man vom Punkt $(1, 0, 0)$ nach $(2, 1, 3)$ geht?

b) Gegeben sei das Kraftfeld $(x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$. Berechnen Sie die Arbeit, wenn man sich entlang der spiralförmigen Kurve $(t \cos(t), t \sin(t), t)$ für $0 \leq t \leq R$ bewegt.

c) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v} : (x, y, z) \longmapsto \left(5005x^{1000} y^3 z, 15x^{1001} y^2 z + 2y, 5x^{1001} y^3 \right).$$

Berechnen Sie die Arbeit A von $\vec{v}$ entlang der Strecke von $P = (1, 0, 1)$ nach $Q = (0, 1, 1)$.