

## Serie 25

Die erste Aufgabe ist eine Multiple-Choice-Aufgabe (MC-Aufgabe), die online gelöst wird. Bitte schicken Sie Ihre Lösungen zu den Online MC-Fragen bis **Mittwoch, 29.05.2019 um 08:15 Uhr** ab.

**Bemerkung:** Bei einigen MC-Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Eine MC-Aufgabe ist dann korrekt gelöst und mit einem Punkt bewertet, wenn Sie genau die richtigen Antworten angeben. Andernfalls wird sie mit Null bewertet. Falls Sie die Lösung nicht wissen, raten Sie nicht. So erhalten wir eine gute Rückmeldung über allfällige Unklarheiten. Viel Erfolg!

**Abgabetermin für die schriftlichen Aufgaben:** Mittwoch, 29.05.2019 in der Vorlesung.

**Homepage:** <https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/>

---

### MC-Aufgaben (Online-Abgabe)

1. Wie lautet die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung  $y''' + 2y' + y = 0$ ?

- (a)  $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$
- (b)  $\lambda^3 + 2\lambda = 0$
- (c)  $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
- (d)  $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1 = 0$

2. Was kann man über eine Differentialgleichung der Form  $y'' + ay' + by = e^x$  mit konstanten Koeffizienten  $a$  und  $b$  immer sagen?

- (a) Ihre Lösungsmenge ist ein Vektorraum der Dimension 2.
- (b) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt  $\alpha e^x$  für eine Konstante  $\alpha$ .
- (c) Ihre allgemeine Lösung lautet  $y_h(x) + \alpha e^x$ , wobei  $y_h$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist und  $\alpha$  eine Konstante ist.
- (d) Sie hat eine partikuläre Lösung der Gestalt  $(\alpha + \beta x + \gamma x^2) e^x$  für Konstanten  $\alpha, \beta, \gamma$ .

**Bitte wenden!**

3. Welche der folgenden Aussagen über die Differentialgleichung  $y'' + 3y' + 2y = 0$  sind richtig?

- (a) Es existiert eine eindeutige Lösung mit  $y(0) = 0$  und  $y(1) = 1 - e$ .
- (b) Es existiert eine eindeutige Lösung mit  $y(0) = 0$  und  $y(1) = 0$ .
- (c) Es existiert eine eindeutige Lösung mit  $y(0) = 1 - e$  und  $y(1) = 0$ .
- (d) Es existiert eine Lösung mit  $y(0) = 1$  und  $y(x)$  konvergiert für  $x \rightarrow \infty$ .
- (e) Es existiert eine Lösung mit  $y(0) = 1$  und  $y(x)$  konvergiert für  $x \rightarrow -\infty$ .
- (f) Es existiert eine eindeutige Lösung mit  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ .
- (g) Es existiert eine eindeutige Lösung mit  $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -3$ .
- (h) Es existiert eine eindeutige Lösung mit  $y(0) = 0$ .
- (i) Es existiert eine eindeutige Lösung mit  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ .

4. Die allgemeine Lösung der Euler'schen Differentialgleichung

$$x^2 y'' - x y' + y = 0$$

ist gleich...

- (a)  $y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x (\ln x)^2$
- (b)  $y(x) = C_1 x + C_2 x^2$
- (c)  $y(x) = C_1 x \ln x + C_2 (\ln x)^2$
- (d)  $y(x) = C_1 x + C_2 x \ln x$

5. Das Indexpolynom einer (homogenen) Eulerschen Differentialgleichung der Ordnung 4 hat die doppelte komplexe Nullstelle  $\alpha = \pm i$ . Wie lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung?

- (a)  $C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$
- (b)  $C_1 \cos(x) + C_2 x \cos(x) + C_3 \sin(x) + C_4 x \sin(x)$
- (c)  $C_1 + C_2 \cos(\ln x) + C_3 (\ln x) \cos(\ln x) + C_4 \sin(\ln x) + C_5 (\ln x) \sin(\ln x)$
- (d)  $C_1 \cos(\ln x) + C_2 (\ln x) \cos(\ln x) + C_3 \sin(\ln x) + C_4 (\ln x) \sin(\ln x)$
- (e)  $C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + C_3$

**Siehe nächstes Blatt!**

Unter folgendem Link können Sie für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung die Lösungskurven von Anfangswertproblemen visualisieren:

[https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/auth/nethz/geogebra/7.8\\_dgl\\_solver\\_2nd\\_order.html](https://metaphor.ethz.ch/x/2019/fs/401-0262-GXL/auth/nethz/geogebra/7.8_dgl_solver_2nd_order.html)

6. Betrachten Sie die 3-parametrische Kurvenschar

$$y(x) = C_1 \cosh(C_3 x) + C_2 \sinh(C_3 x)$$

mit den Parametern  $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ . Finden Sie eine zugehörige Differentialgleichung.

7. a) Lösen Sie die Differentialgleichung  $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$ .

b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y'' + 4y' &= xe^x, & x \in (-\infty, \infty) \\ y(0) &= y'(0) = 0. \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung  $y''' + y'' + y' + y + x + 1 = 0$  mit  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ .

8. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'' - (2\alpha - 4)y' + (8 - 4\alpha)y = 0.$$

a) Für welche Werte von  $\alpha$  gibt es sowohl Lösungen, die für  $x \rightarrow \infty$  konvergieren (aber ungleich der konstanten Funktion 0 sind) als auch Lösungen, die für  $x \rightarrow \infty$  nicht konvergieren?

b) Für welche  $\alpha$  gibt es Lösungen  $y$ , die für  $x \rightarrow \infty$  konvergieren mit  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) \neq 0$ ?

9. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1, \\ y(1) = y'(1) = 0 \end{cases}$$

für die Funktion  $y = y(x)$ ,  $x > 0$ .

*Hinweis:* Für die partikuläre Lösung können Sie den Ansatz  $y_p(x) = A + Bx + Cx^2$  wählen.