

Serie 5

Aufgabe 1

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- b) Zeigen Sie, dass

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

nur einen einzigen reellen Eigenwert besitzt und berechnen Sie die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert.

- c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kontrollieren Sie, dass der Vektor v ein Eigenvektor von A ist. Zeigen Sie anschliessend, dass der Vektor auch ein Eigenvektor der inversen Matrix A^{-1} sein muss (geht auch ohne Ausrechnen von A^{-1}). Welcher Eigenwert von A^{-1} gehört zu diesem Eigenvektor?

Bemerkung: Dies gilt allgemein, Eigenvektoren einer invertierbaren Matrix sind automatisch Eigenvektoren der inversen Matrix und umgekehrt. Was mit den dazugehörigen Eigenwerten passiert, sehen Sie in der Aufgabe.

Aufgabe 2

Seien $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Zeigen Sie, dass die Spaltenvektoren von T Eigenvektoren von A sind.

- b) Zeigen Sie, dass $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- c) Berechnen Sie $D = T^{-1}AT$. Was stellen Sie fest?
- d) Lösen Sie $D = T^{-1}AT$ nach A auf und berechnen Sie damit $A^2 = A \cdot A$. Was sieht die Matrix A^{99} aus?

Aufgabe 3

Welche der folgenden Aussagen ist richtig, welche falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

- a) Ist x ein Eigenvektor von A , dann ist x auch ein Eigenvektor von A^2 .
- b) Ist λ ein Eigenwert von A , dann ist λ auch ein Eigenwert von A^2 .
- c) Ist x ein Eigenvektor von A und auch ein Eigenvektor von B , dann ist x ein Eigenvektor der Matrix $A + B$.
- d) Ist λ ein Eigenwert von A und auch ein Eigenwert von B , dann ist λ ein Eigenwert von $A + B$.
- e) Jede 2×2 -Matrix hat zwei voneinander verschiedene Eigenwerte.
- f) Jede Matrix mit positiver Determinante hat mindestens einen positiven Eigenwert.
- g) Jede quadratische Matrix mit reellen Einträgen hat reelle Eigenwerte.
- h) Ist λ ein Eigenwert von A , so ist $\lambda + 1$ ein Eigenwert von $A + E$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet.

Hinweis: Drei Aussagen sind richtig, fünf sind falsch. Bei falschen Aussagen reicht ein Gegenbeispiel als Begründung.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben

Dienstag, den 26.03.2019 / Mittwoch, den 27.03.2019 in den Übungsstunden

Präsenz der Assistenzgruppe

Zweimal in der Woche beantworten Doktoranden in einer Präsenz Fragen: Montag und Donnerstag von 12 bis 13 Uhr im HG G 32.6.