

Mathematik II

Frühlingssemester 2019

Kapitel 10: Mehrdimensionale Integrale

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

<http://www.math.ethz.ch/~farkas>

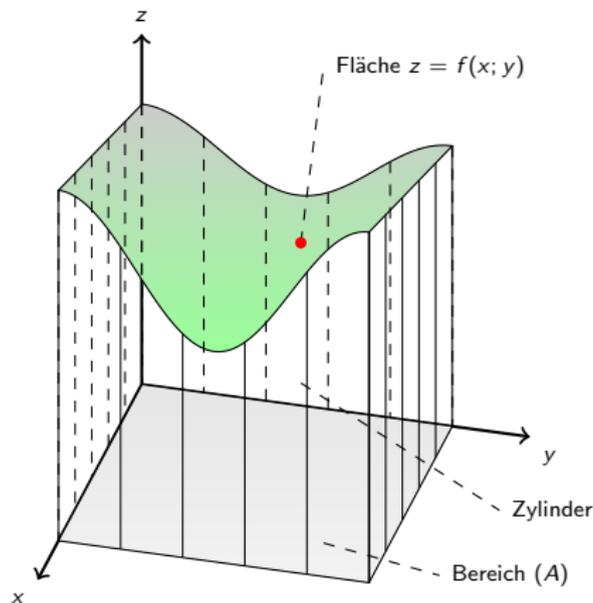
10. Mehrdimensionale Integrale

- Doppelintegrale
 - Definition und geometrische Deutung von Doppelintegralen
 - Berechnung von Doppelintegralen
- Dreifachintegrale
 - Definition von Dreifachintegralen
 - Berechnung von Dreifachintegralen

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*
Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
14. Auflage
Springer Verlag
- **Seiten 266 – 326,**
Seiten 338 – 343 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Definition und geometrische Deutung von Doppelintegralen



Zylindrischer Körper mit der "Deckelfläche"
 $z = f(x; y)$

Anhand eines *geometrischen* Problems, erklären wir zuerst die Idee hinter dem *Doppelintegral* in anschaulicher Weise:

$z = f(x; y)$ sei eine im Bereich (A) definierte und stetige Funktion mit $f(x; y) \geq 0$.

Betrachte den im Bild dargestellten *zylindrischen* Körper.

Sein "Boden" besteht aus dem Bereich (A) der xy -Ebene, sein "Deckel" ist die Bildfläche von $z = f(x; y)$. Die auf dem Rand des Bereiches (A) errichteten "Mantellinien" verlaufen dabei *parallel* zur z -Achse. Unser Interesse gilt nun dem *Zylindervolumen* V .

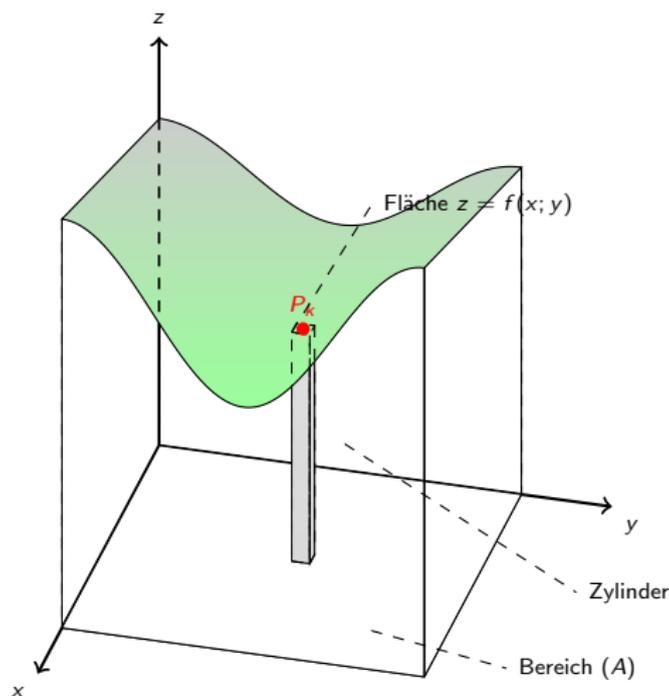
Bestimmung der Zylindervolumens

- 1 Zunächst wird der Bereich (A) ("Zylinderboden") in n Teilbereiche mit den Flächeninhalten $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$ zerlegt. Der Zylinder selbst zerfällt dabei in eine gleich grosse Anzahl von "Röhren".
- 2 Wir beschäftigen uns nun näher mit der (wahllos herausgegriffenen) k -ten Röhre. Ihr *Boden* ist *eben* und vom Flächeninhalt ΔA_k , ihr *Deckel* dagegen als Teil der Bildfläche von $z = f(x; y)$ i.a. *gekrümmt*. Das Volumen ΔV_k dieser Röhre stimmt dann *näherungsweise* mit dem Volumen einer Säule überein, die über der gleichen Grundfläche errichtet wird und deren Höhe durch die Höhenkoordinate $z_k = f(x_k; y_k)$ des Flächenpunktes $P_k = (x_k; y_k; z_k)$ gegeben ist:

$$\Delta V_k = z_k \Delta A_k = f(x_k; y_k) \Delta A_k$$

Mit den übrigen Röhren verfahren wir ebenso. Durch *Aufsummierung* der Röhren- bzw. Säulenvolumina erhalten wir schliesslich den folgenden *Näherungswert* für das gesuchte Zylindervolumen V :

$$V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^n f(x_k; y_k) \Delta A_k$$



Zylindrischer Körper mit der "Deckelfläche"
 $z = f(x; y)$

Dieser Näherungswert lässt sich noch *verbessern*, wenn wir in geeigneter Weise die Anzahl der Röhren (Säulen) vergrößern.

Wir lassen nun die Anzahl n der Teilbereiche *unbegrenzt* wachsen ($n \rightarrow +\infty$), wobei gleichzeitig der Durchmesser eines jeden Teilbereiches gegen *Null* streben soll. Bei diesem Grenzübergang strebt die Summe gegen einen *Grenzwert*.

Definition

Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta A_k \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_k; y_k) \Delta A_k$$

wird (falls er existiert) als *Doppelintegral* bezeichnet und durch das Symbol

$$\iint_{(A)} f(x; y) dA$$

gekennzeichnet.

Anmerkungen

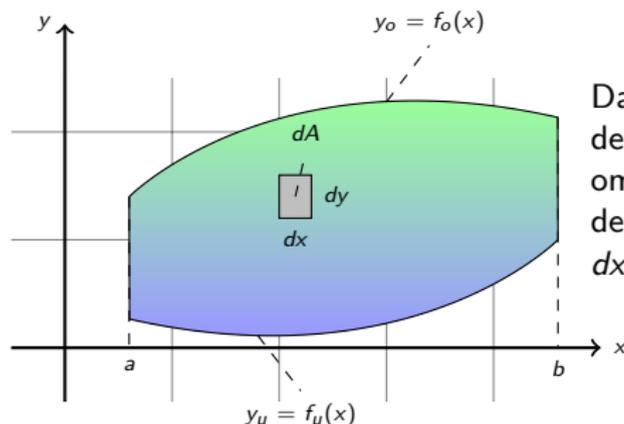
- Auch die symbolische Schreibweise $\int_{(A)} f(x; y) dA$, die nur ein Integralzeichen verwendet, ist möglich.
- Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:
 - x, y *Integrationsvariablen*
 - $f(x; y)$ *Integrandfunktion* (kurz: *Integrand*)
 - dA *Flächendifferential* oder *Flächenelement*
 - (A) *Integrationsbereich*
- Für den Begriff "Doppelintegral" sind auch folgende Bezeichnungen üblich: *2-dimensionales Bereichs-* oder *Gebietsintegral*, *Flächenintegral*.
- Der Grenzwert ist vorhanden, wenn der Integrand $f(x; y)$ im Integrationsbereich (A) *stetig* ist.

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

Ein *normaler* Integrationsbereich (A) lässt sich durch die Ungleichungen

$$f_u(x) \leq y \leq f_o(x)$$

beschreiben, wobei $y_u = f_u(x)$ die *untere* und $y_o = f_o(x)$ die *obere* Randkurve ist und die *seitlichen* Begrenzungen aus zwei Parallelen zur y -Achse mit den Funktionsgleichungen $x = a$ und $x = b$ bestehen.



Das *Flächenelement* dA besitzt in der kartesischen Darstellung die geometrische Form eines *Rechtecks* mit den infinitesimal kleinen Seitenlängen dx und dy . Somit ist

$$dA = dx \cdot dy.$$

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

Über diesem Flächenelement liegt eine (quaderförmige) *Säule* mit dem infinitesimal kleinen Rauminhalt

$$dV = z \cdot dA = f(x; y) dx dy$$

Das Volumen V berechnen wir nun *schrittweise* durch Summation der Säulenvolumina.

Berechnung von Doppelintegralen unter Verwendung kartesischer Koordinaten

Die Berechnung des *Doppelintegrals*

$$\iint_{(A)} f(x; y) dA$$

mit (A) einem *normalem* Integrationsbereich erfolgt durch *zwei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen:

$$\iint_{(A)} f(x; y) dA = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} f(x; y) dy dx$$

Berechnung von Doppelintegralen unter Verwendung kartesischer Koordinaten

(A): Integrationsbereich

- *Innere Integration (nach der Variablen y)*

Die Variable x wird zunächst als eine Art *Konstante* (Parameter) betrachtet und die Funktion $(x, y) \mapsto f(x; y)$ unter Verwendung der für gewöhnliche Integrale gültigen Regeln *nach der Variablen y* integriert.

In die ermittelte Stammfunktion setzt man dann für y die Integrationsgrenzen $f_o(x)$ bzw. $f_u(x)$ ein und bildet die entsprechende Differenz.

- *Äussere Integration (nach der Variablen x)*

Die als Ergebnis der inneren Integration erhaltene, nur noch von der Variablen x abhängige Funktion, wird nun in den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$ integriert.

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

Anmerkungen

- Die Reihenfolge der Integrationen ist eindeutig durch die Reihenfolge der Differentiale im Doppelintegral festgesetzt. Sie ist nur dann vertauschbar, wenn sämtliche Integrationsgrenzen *konstant* sind (rechteckiger Integrationsbereich):

$$\int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} f(x; y) dy dx = \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{x=x_1}^{x_2} f(x; y) dx dy$$

- Bei einem Doppelintegral vom Typ

$$\int_{y=a}^b \int_{x=f_u(y)}^{f_o(y)} f(x; y) dx dy$$

wird zunächst nach x und erst *anschliessend* nach der Variablen y integriert.

Beispiel

- Wir berechnen das Doppelintegral $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\pi/4} x \cdot \cos(2y) dy dx$.
- *Innere Integration (nach der Variablen y):*

$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{\pi/4} x \cdot \cos(2y) dy &= x \cdot \int_{y=0}^{\pi/4} \cos(2y) dy \\ &= x \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \sin(2y) \right]_{y=0}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2} x \end{aligned}$$

- *Äussere Integration (nach der Variablen x):*

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^1 \frac{1}{2}x \, dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^1 x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{x=0}^1 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

- *Ergebnis:*

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\pi/4} x \cdot \cos(2y) \, dy \, dx = \frac{1}{4}$$

Doppelintegral in kartesischen Koordinaten

Beispiel



$$\int_{x=0}^1 \int_{y=x}^{\sqrt{x}} xy \, dy \, dx = ?$$

- *Innere Integration (nach der Variablen y):*

$$\begin{aligned} \int_{y=x}^{\sqrt{x}} xy \, dy &= x \cdot \int_{y=x}^{\sqrt{x}} y \, dy \\ &= x \cdot \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_x^{\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2} x (x - x^2) \\ &= \frac{1}{2} (x^2 - x^3) \end{aligned}$$

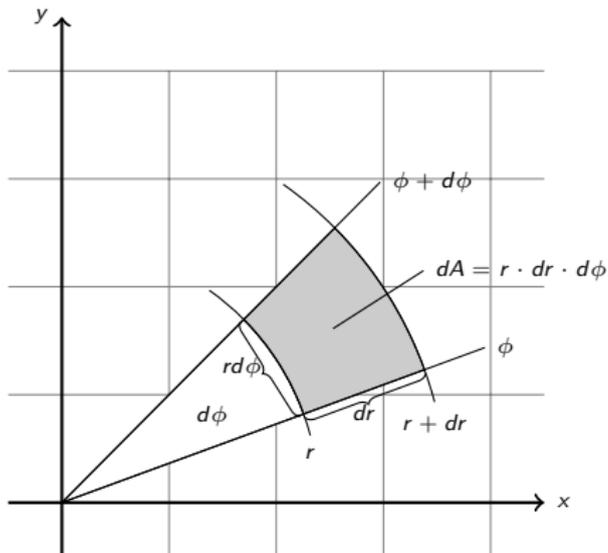
- *Äussere Integration (nach der Variablen x):*

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^1 \frac{1}{2}(x^2 - x^3) dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$

- *Ergebnis:*

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=x}^{\sqrt{x}} xy \, dy \, dx = \frac{1}{24}$$

Doppelintegral in Polarkoordinaten



Das *Flächenelement* dA wird in der Polarkoordinatendarstellung von zwei infinitesimal benachbarten *Kreisen* mit den Radien r und $r + dr$ und zwei infinitesimal benachbarten *Strahlen* mit den Polarwinkeln ϕ und $\phi + d\phi$ berandet.

$$dA = r \cdot dr \cdot d\phi$$

Doppelintegral in Polarkoordinaten

Berechnung von Doppelintegralen unter Verwendung von Polarkoordinaten

Beim Übergang von den kartesischen Koordinaten $(x; y)$ zu den *Polarkoordinaten* $(r; \phi)$ gelten die Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos(\phi), \quad y = r \cdot \sin(\phi), \quad dA = r \, dr \, d\phi$$

Ein Doppelintegral $\iint_{(A)} f(x; y) dA$ transformiert sich dabei wie folgt auf dem Integrationsbereich (A) :

$$\iint_{(A)} f(x; y) dA = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} f(r \cdot \cos(\phi); r \cdot \sin(\phi)) \cdot r \, dr \, d\phi$$

Die Integralberechnung erfolgt dabei in *zwei* nacheinander auszuführenden *gewöhnlichen* Integrationsschritten:

- *Innere Integration* nach der Variablen r , wobei die Winkelkoordinate ϕ als Parameter festgehalten wird.
- *Äussere Integration* nach der Variablen ϕ

Doppelintegral in Polarkoordinaten

Beispiel



$$\iint_{(A)} xy \cdot dA?$$

mit $(A) = \{(r \cdot \cos(\phi); r \cdot \sin(\phi)) \mid \phi \in [0, \pi/4], r \in [0, 2]\}$

- Lösung:

Bei Verwendung der *Polarkoordinaten* transformiert sich der Integrand $f(x; y)$ wie folgt:

$$f(x; y) = xy = r^2 \cdot \cos(\phi) \cdot \sin(\phi)$$

Das Doppelintegral lautet somit in der Polarkoordinatendarstellung:

$$\iint_{(A)} xy \cdot dA = \int_{\phi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^2 r^2 \cdot \cos(\phi) \sin(\phi) \cdot r \, dr \, d\phi$$

Doppelintegral in Polarkoordinaten

- *Innere Integration (nach der Variablen r):*

$$\begin{aligned}\int_{r=0}^2 r^3 \cdot \cos(\phi) \sin(\phi) dr &= \cos(\phi) \sin(\phi) \cdot \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^2 \\ &= 4 \cdot \cos(\phi) \sin(\phi)\end{aligned}$$

- *Äussere Integration (nach der Variablen ϕ):*

$$\begin{aligned}\int_{\phi=0}^{\pi/4} 4 \cdot \cos(\phi) \sin(\phi) d\phi &= \int_{\phi=0}^{\pi/4} 2 \cdot \sin(2\phi) d\phi \\ &= [-\cos(2\phi)]_{\phi=0}^{\pi/4} \\ &= 1\end{aligned}$$

Der *Flächeninhalt* A eines (kartesischen) Normalbereichs (A) lässt sich nach dem "Baukastenprinzip" aus *infinitesimal kleinen* rechteckigen *Flächenelementen* von Flächeninhalt $dA = dx dy$ zusammensetzen.

Flächeninhalt

- *Definitionsformel:*

$$A = \iint_{(A)} dA$$

- In *kartesischen Koordinaten:*

$$A = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} dy dx$$

- In *Polarkoordinaten:*

$$A = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r dr d\phi$$

Anmerkungen

- Die *innere* Integration (nach der Variablen y) lässt sich beim Doppelintegral sofort ausführen. Wir erhalten die Darstellung:

$$A = \int_a^b (f_o(x) - f_u(x)) dx$$

- Auch in der *Polarkoordinatendarstellung* kann das Integral sofort bestimmt werden:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r \, dr \, d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} d\phi \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} (r_a^2(\phi) - r_i^2(\phi)) d\phi \end{aligned}$$

Flächeninhalt

Beispiel

- Wir berechnen den *Flächeninhalt* einer *Mittelpunktellipse* mit der Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ im 1. Quadranten mit Hilfe eines *Doppelintegrals*. Die *Integrationsgrenzen* lauten somit:

y-Integration: Von $y = 0$ bis $y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$

x-Integration: Von $x = 0$ bis $x = a$

- Nach der Integralformel ist dann:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \, dx = \int_{x=0}^a \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \\
 &= \frac{b}{a} \left[\frac{1}{2} \left(x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \cdot \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right) \right]_{x=0}^a \\
 &= \frac{\pi ab}{4}
 \end{aligned}$$

- Der Flächeninhalt der *Ellipse* beträgt somit

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} dy dx \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

Schwerpunkt einer homogenen ebenen Fläche

- *Definitionsformeln:*

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} x \, dA, \quad y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y \, dA$$

- *In kartesischen Koordinaten:*

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} x \, dy \, dx, \quad y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} y \, dy \, dx$$

- *In Polarkoordinaten:*

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r^2 \cos(\phi) \, dr \, d\phi$$
$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r^2 \sin(\phi) \, dr \, d\phi$$

Schwerpunkt einer Fläche

Anmerkungen

- In den Doppelintegralen ist die *innere* Integration nach y *sofort* durchführbar.

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_a^b x (f_o(x) - f_u(x)) dx$$

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_a^b (f_o^2(x) - f_u^2(x)) dx$$

- Auch in der Polarkoordinatendarstellung lässt sich die *innere* Integration nach der Variablen r *sofort* ausführen:

$$x_S = \frac{1}{3A} \cdot \int_{\phi_1}^{\phi_2} (r_a^3(\phi) - r_i^3(\phi)) \cos(\phi) d\phi$$

$$y_S = \frac{1}{3A} \cdot \int_{\phi_1}^{\phi_2} (r_a^3(\phi) - r_i^3(\phi)) \sin(\phi) d\phi$$

Flächenmomente (Flächenträgheitsmomente)

Axiale und polare Flächenmomente 2. Grades (Flächenträgheitsmomente)

- *Definitionsformeln:*

$$I_x = \iint_{(A)} y^2 dA, \quad I_y = \iint_{(A)} x^2 dA$$

$$I_p = I_x + I_y$$

- *In kartesischen Koordinaten:*

$$I_x = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} y^2 dy dx$$

$$I_y = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} x^2 dy dx$$

$$I_p = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} (x^2 + y^2) dy dx$$

Flächenmomente (Flächenträgheitsmomente)

Axiale und polare Flächenmomente 2. Grades (Flächenträgheitsmomente)

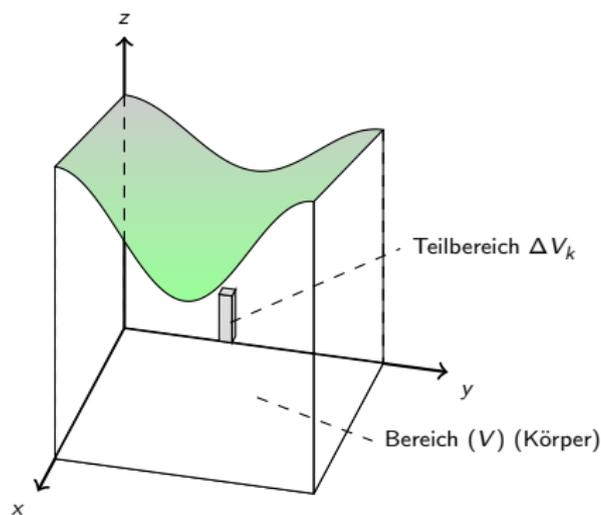
- *In Polarkoordinaten:*

$$I_x = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r^3 \sin^2(\phi) dr d\phi$$

$$I_y = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r^3 \cos^2(\phi) dr d\phi$$

$$I_r = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} r^3 dr d\phi$$

Definition von Dreifachintegralen



Zylindrischer Körper mit der "Deckelfläche"
 $z = f(x; y)$

$u = f(x; y; z)$ sei eine im räumlichen Bereich (V) definierte und stetige Funktion.

Den Bereich (auch *Körper* genannt) unterteilen wir zunächst in n Teilbereiche, mit dem k -ten Teilbereich vom Volumen ΔV_k werden wir uns nun eingehender befassen.

In diesem Teilbereich wählen wir einen *beliebigen* Punkt $P_k = (x_k; y_k; z_k)$ aus, berechnen an dieser Stelle den *Funktionswert* $u_k = f(x_k; y_k; z_k)$ und bilden schliesslich das *Produkt* aus Funktionswert und Volumen: $f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k$.

Definition von Dreifachintegralen

Definition

Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta V_k \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^n f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k$$

wird (falls er existiert) als *Dreifachintegral* bezeichnet und durch das Symbol

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) dV$$

gekennzeichnet.

Anmerkungen

- Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:
 - x, y, z *Integrationsvariablen*
 - $f(x; y; z)$ *Integrandfunktion* (kurz: *Integrand*)
 - dV *Volumendifferential* oder *Volumenelement*
 - (V) *Räumlicher Integrationsbereich* oder *Körper*
- Der Grenzwert ist vorhanden, wenn der Integrand $f(x; y; z)$ im Integrationsbereich *stetig* ist.

Berechnung von Dreifachintegralen

Berechnung von Dreifachintegralen unter Verwendung kartesischer Koordinaten

Die Berechnung eines *Dreifachintegrals* $\iiint_{(V)} f(x; y; z) dV$ erfolgt durch *drei* nacheinander auszuführende *gewöhnliche* Integrationen:

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) dV = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=g_u(x;y)}^{g_o(x;y)} f(x; y; z) dz dy dx$$

(V) : Zylindrischer Integrationsbereich.

Die einzelnen Integrationsschritte erfolgen dabei von *innen nach aussen*, d.h. in der Reihenfolge z, y, x , wobei jeweils die übrigen Variablen als Parameter festgehalten werden.

Berechnung von Dreifachintegralen

Anmerkung

- Für $f(x; y; z) = 1$ beschreibt das dreifache Integral das *Volumen* V des zylindrischen Körpers (V):

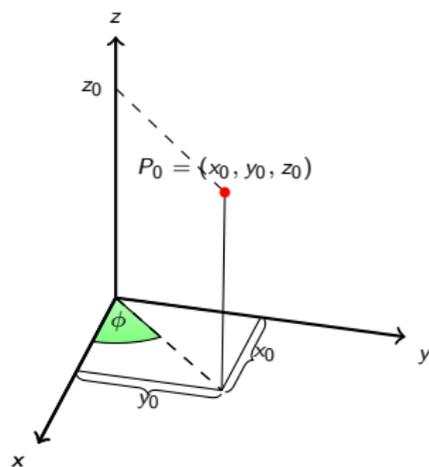
$$\iiint_{(V)} dV = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=g_u(x;y)}^{g_o(x;y)} dz dy dx$$

Beispiel

-

$$\begin{aligned} \int_{x=1}^2 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{x-y} y \cdot e^z dz dy dx &= \dots \\ &= 1,004 \end{aligned}$$

Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten



Zylinderkoordinaten

Die *Zylinderkoordinaten* eines Raumpunktes P bestehen aus den *Polarkoordinaten* r und ϕ des Projektionspunktes P' in der x, y -Ebene und der (kartesischen) *Höhenkoordinate* z .

Dreifachintegral in Zylinderkoordinaten

Berechnung von Dreifachintegralen unter Verwendung von Zylinderkoordinaten

Beim Übergang von den *kartesischen* Raumkoordinaten $(x; y; z)$ zu den *Zylinderkoordinaten* $(r; \phi; z)$ gelten die Transformationsgleichungen

$$x = r \cdot \cos(\phi), \quad y = r \cdot \sin(\phi), \quad z = z$$

$$dV = dx \, dy \, dz = r \, dz \, dr \, d\phi$$

Ein *Dreifachintegral* $\iiint_{(V)} dV$ transformiert sich dabei wie folgt:

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) \, dV = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_i(\phi)}^{r_a(\phi)} \int_{z=z_u(r; \phi)}^{z_o(r; \phi)} f(r \cdot \cos(\phi); r \cdot \sin(\phi); z) \, r \, dz \, dr \, d\phi$$

Die Integration erfolgt dabei in *drei* nacheinander auszuführenden *gewöhnlichen* Integrationschritten in der Reihenfolge z , r , und ϕ .

Funktionsgleichung einer Rotationsfläche

Durch Rotation einer Kurve $z = f(x)$ um die z -Achse entsteht eine *Rotationsfläche* mit der Funktionsgleichung $z = f(r)$. Die *Gleichung* der Rotationsfläche erhält man dabei formal aus der Kurvengleichung mit Hilfe der Substitution $x \rightarrow r$

Anmerkung

- Bei einer Rotationsfläche $z = f(r)$ hängt die Höhenkoordinate z wegen der Rotationssymmetrie *nur* von r , nicht aber von der Winkelkoordinate ϕ ab.

Volumen eines (zylindrischen) Körpers

Volumen eines (zylindrischen) Körpers

- *Definitionsformel:*

$$\iiint_{(V)} dV$$

- *In kartesischen Koordinaten:*

$$V = \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=g_u(x;y)}^{g_o(x;y)} dz dy dx$$

- *In Zylinderkoordinaten*

$$\iiint_{(V)} f(x; y; z) dV = \int_{\phi=\phi_1}^{\phi_2} \int_{r=r_1(\phi)}^{r_2(\phi)} \int_{z=z_u(r;\phi)}^{z_o(r;\phi)} r dz dr d\phi$$

Schwerpunkt eines homogenen Körpers

Schwerpunkt eines homogenen Körpers

Definitionsformel der Schwerpunktkoordinaten:

$$x_S = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} x \, dV, \quad y_S = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} y \, dV, \quad z_S = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z \, dV$$

In kartesischen Koordinaten:

$$x_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} x \, dz \, dy \, dx$$

$$y_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} y \, dz \, dy \, dx$$

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=z_u(x;y)}^{z_o(x;y)} z \, dz \, dy \, dx$$

Schwerpunkt eines homogenen Körpers

Schwerpunkt eines homogenen Rotationskörpers (Rotationsachse: z-Achse)

Unter Verwendung von *Zylinderkoordinaten* gilt für den auf der Rotationsachse (z-Achse) liegenden *Schwerpunkt* $S = (x_S; y_S; z_S)$:

$$x_S = 0, \quad y_S = 0, \quad z_S = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} z r \, dz \, dr \, d\phi$$

V: Rotationsvolumen (berechnet nach der Integralformel).

Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers

Massenträgheitsmoment eines homogenen Körpers

Definitionsformel:

$$J = \rho \cdot \iiint_{(V)} r_A^2 dV$$

In kartesischen Koordinaten:

$$J = \rho \cdot \int_{x=a}^b \int_{y=f_u(x)}^{f_o(x)} \int_{z=g_u(x;y)}^{g_o(x;y)} (x^2 + y^2) dz dy dx$$

Dabei bedeuten:

- r_A : Senkrechter Abstand des Volumenelementes dV von der Bezugsachse A .
- ρ : konstante Dichte des Körpers.