ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Mathematik II
# Frühlingssemester 2019
# Kapitel 11: Gewöhnliche Differentialgleichungen

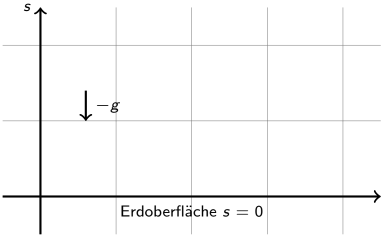
Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

## Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 343 – 455**,
  **Seiten 522 – 539 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)**

# Ein einführendes Beispiel




zum Freien Fall im luftleeren Raum

Wir betrachten einen im luftleeren Raum *frei* fallenden Körper.
Wir erinnern an den folgenden Zusammenhang zwischen

- der Weg-Zeit-Funktion $s = s(t)$
- der Geschwindigkeit $v = v(t)$
- der Beschleunigung $a = a(t)$

einer Bewegung:

$$v(t) = \dot{s}(t) \quad \text{und} \quad a = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$$

Für den *freien Fall* gilt somit:

$$\ddot{s}(t) = -g$$

# Ein einführendes Beispiel

- Der 1. Integrationsschritt führt zunächst zur *Geschwindigkeits-Zeit-Funktion*

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (-g)dt = -gt + C_1$$

- Durch *nochmalige Integration* folgt hieraus die gesuchte *Weg-Zeit-Funktion*

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (-gt + C_1)dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

- Für $t = 0$:

$$\begin{cases} s(0) = C_2: & \textit{Wegmarke (Höhe)} \text{ zu Beginn} \\ v(0) = C_1: & \text{Anfangsgeschwindigkeit} \end{cases}$$

  Üblicherweise schreibt man dafür:

$$s(0) = s_0 \quad \text{und} \quad v(0) = v_0$$

- Wir erhalten:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$$

# Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung

**Definition**

Eine Gleichung, in der Ableitungen einer unbekannten Funktion $y = y(x)$ bis zur $n$-ten Ordnung auftreten, heisst eine *gewöhnliche Differentialgleichung $n$-ter Ordnung*.

**Anmerkung**

- Sie ist daher in der *impliziten* Form

$$F(x; y; y'; ...; y^{(n)}) = 0$$

oder, falls diese Gleichung nach der höchsten Ableitung $y^{(n)}$ auflösbar ist, in der *expliziten* Form

$$y^{(n)} = f(x; y; y'; ...; y^{(n-1)})$$

darstellbar.

# Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung

Beispiele

| | |
|---|---|
| $y' = 2x$ | Explizite Dgl 1. Ordnung |
| $x + yy' = 0$ | Implizite Dgl 1. Ordnung |
| $y' + yy'' = 0$ | Implizite Dgl 2. Ordnung |
| $\ddot{s} = -g$ | Explizite Dgl 2. Ordnung |
| $y''' + 2y'' = cos(x)$ | Implizite Dgl 3. Ordnung |
| $y^{(6)} - y^{(4)} + y'' = e^x$ | Implizite Dgl 6. Ordnung |

# Definition einer gewöhnlichen Differentialgleichung

**Definition**

Eine Funktion $y = y(x)$ heisst eine *Lösung* der Differentialgleichung, wenn sie mit ihren Ableitungen zusammen die Differentialgleichung (identisch) erfüllt.

Wir unterscheiden dabei noch zwischen der *allgemeinen* Lösung und der *speziellen oder partikulären* Lösung:

- Die *allgemeine* Lösung einer Differentialgleichung $n$-ter Ordnung enthält noch $n$ voneinander unabhängige *Parameter* (Integrationskonstanten).
- Eine *spezielle* oder *partikuläre* Lösung wird aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man aufgrund *zusätzlicher* Bedingungen den $n$ Parametern *feste* Werte zuweist.
  Dies kann beispielsweise durch *Anfangsbedingungen* oder durch *Randbedingungen* geschehen.

## Beispiele

- Die *allgemeine* Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = 2x$$

erhalten wir durch *Integration:*

$$y = \int y'\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

- Die *harmonische Schwingung* eines elastischen Federpendels lässt sich bekanntlich durch eine Sinusfunktion vom Typ

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi)$$

beschreiben.
Wir differenzieren die Funktion $x(t)$ *zweimal* nach der Zeit und erhalten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega_0 A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi) \\ \ddot{x} &= -\omega_0^2 A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \\ &= -\omega_0^2 x \end{aligned}$$

# Anfangswert- und Randwertprobleme

- Bei einem *Anfangswertproblem*, auch *Anfangswertaufgabe* genannt, werden der gesuchten *speziellen* Lösungsfunktion $y = y(x)$ einer Differentialgleichung $n$-ter Ordnung insgesamt $n$ Werte vorgeschrieben, nämlich der *Funktionswert* sowie die Werte der $n - 1$ ersten *Ableitungen* an einer Stelle $x_0$: $y(x_0)$, $y'(x_0)$,..., $y^{(n-1)}(x_0)$.
- Wir bezeichnen sie als *Anfangswerte* oder *Anfangsbedingungen*.
- Sie führen zu $n$ *Bestimmungsgleichungen* für die Parameter $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

# Anfangswert- und Randwertprobleme

**Dgl 1. Ordnung:** Gesucht ist diejenige *spezielle* Lösungskurve der Differentialgleichung, die durch den vorgegebenen *Punkt* $P = (x_0, y_0)$ verläuft.

**Dgl 2. Ordnung:** Gesucht ist diejenige *spezielle* Lösungskurve der Differentialgleichung, die durch den vorgegebenen *Punkt* $P = (x_0, y_0)$ verläuft und dort die vorgegebene *Steigung* $y'(x_0) = m$ besitzt.

# Anfangswert- und Randwertprobleme

## Beispiel

- Wir lösen die *Anfangswertaufgabe*

$$y' = 2x, \quad y(0) = 1 :$$

| | |
|---|---|
| *Allgemeine Lösung:* | $y = \int y' dx = \int 2x \; dx = x^2 + C$ |
| *Bestimmung des Parameters:* | $y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ |
| *Gesuchte spezielle Lösung:* | $y(x) = x^2 + 1$ |

- Das *Anfangswertproblem*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0 \qquad (x_0 > 0, \, \omega_0 \neq 0)$$

beschreibt die *hamonische Schwingung* eines elastischen *Federpendels*. Die allgemeine Lösung lautet dann:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (A > 0; 0 \leq \phi \leq 2\pi)$$

# Anfangswert- und Randwertprobleme

- Die Parameter $A$ und $\phi$ bestimmen wir aus den beiden *Anfangswerten* wie folgt:

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 \quad &\Rightarrow \quad A \cdot \sin(\phi) = x_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega_0 A \cos(\phi) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \phi \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \end{aligned}$$

  Wegen $A > 0$ und $x_0 > 0$ ist auch $\sin(\phi) > 0$.
  Der gesuchte Phasenwinkel liegt daher im Intervall $0 < \phi < \pi$.
  Es kommt somit nür die Lösung $\phi = \pi/2$ in Frage.
  Dann folgt $A = x_0$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) \\ &= x_0 \cdot \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

# Anfangswert- und Randwertprobleme

- Bei einem *Randwertproblem*, auch *Randwertaufgabe* genannt, werden der gesuchten *speziellen* Lösung einer Differentialgleichung $n$-ter Ordnung an $n$ verschiedenen Stellen $x_1$, $x_2$, ...,$x_n$ der Reihe nach die Funktionswerte $y(x_1)$, $y(x_2)$,..., $y(x_n)$ vorgeschrieben.
- Sie werden als *Randwerte* oder *Randbedingungen* bezeichnet und führen wiederum zu $n$ *Bestimmungsgleichungen* für die $n$ Parameter $C_1$, $C_2$, ...,$C_n$ der allgemeinen Lösung.
- Für eine Differentialgleichung 2. Ordnung bedeutet dies: die Lösungskurve ist so zu bestimmen, dass sie durch *zwei* vorgegebene Punkte $P_1 = (x_1; y_1)$ und $P_2 = (x_2; y_2)$ verläuft.
- Es soll jedoch nicht unerwähnt bleiben, dass nicht *jedes* Randwertproblem lösbar ist.
- In bestimmten Fällen können auch *mehrere* Lösungen auftreten.

# Anfangswert- und Randwertprobleme

## Beispiel

- Wir betrachten einen auf zwei Stützen ruhenden und durch eine *konstante* Streckenlast $q$ gleichmässig belasteten *Balken* der Länge $L$. In der Festigkeitslehre wird gezeigt, dass die *Biegelinie* $y = y(x)$ für *kleine* Durchbiegungen näherungsweise der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = -\frac{M_b}{EI}$$

genügt. Darin bedeuten:

$E$: *Elastizitätsmodul* (eine Materialkonstante)
$I$: *Flächenmoment* des Balkenquerschnitts
$M_b$: *Biegemoment*

Für das Biegemoment $M_b$ erhalten wir in diesem Belastungsfall

$$M_b = \frac{q}{2}(Lx - x^2) \quad (0 \le x \le L).$$

An den beiden Enden ist die Durchbiegung jeweils *Null*.

Wir erhalten somit die *Randwertaufgabe*

$$y'' = -\frac{q}{2EI}(Lx - x^2) \quad y(0) = y(L) = 0 \quad (0 \le x \le L) \text{ zu lösen.}$$

## Anfangswert- und Randwertprobleme

- Wir bestimmen die *allgemeine Lösung*:

$$y(x) = -\frac{q}{2EI}\left(\frac{1}{6}Lx^3 - \frac{1}{12}x^4 + C_1 x + C_2\right)$$

- Die Integrationskonstanten $C_1$ und $C_2$ berechnen wir aus den *Randbedingungen* wie folgt:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$y(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{12}L^3$$

- Die *Biegelinie* lautet somit:

$$y(x) = \frac{q}{24EI}\left(-2Lx^3 + x^4 + L^3 x\right)$$

## Geometrische Betrachtungen

Die Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ besitze die Eigenschaft, dass durch *jeden* Punkt des Definitionsbereiches von $f(x; y)$ *genau* eine Lösungskurve verlaufe. $P_0 = (x_0; y_0)$ sei ein solcher Punkt und $y = y(x)$ die durch $P_0$ gehende *Lösungskurve*.
Die Steigung $m$ der Kurventangente in $P_0$ kann dann auf *zwei* verschiedene Arten berechnet werden:

- Aus der (als bekannt vorausgesetzten) *Funktionsgleichung* $y = y(x)$ der Lösungskurve durch Differentiation nach der Variablen $x$: $m = y'(x_0)$;
- Aus der Differentialgleichung $y' = f(x; y)$ selbst, indem man in diese Gleichung die Koordinaten des Punktes $P_0$ einsetzt: $m = f(x_0; y_0)$ .

Es gilt somit

$$m = y'(x_0) = f(x_0; y_0)$$

# Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$y' = f(x) \cdot g(y)$ oder $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ heisst separabel und lässt sich

durch *"Trennung der Variablen"* lösen: $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

### "Trennung der Variablen"

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

lässt sich schrittweise wie folgt lösen:

1. *Trennung* der beiden Variablen.
2. Integration auf *beiden* Seiten der Gleichung.
3. Auflösung der in Form einer impliziten Gleichung vom Typ $F_1(y) = F_2(x)$ vorliegenden allgemeinen Lösung nach der Variablen $y$ (falls überhaupt möglich).

# Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

## Beispiel

- Die *Anfangswertaufgabe*

$$x + yy' = 0, \quad y(0) = 2$$

lösen wir durch *Trennung der Variablen*.

  - *Trennung der Variablen:*

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad y\ dy = -x\ dx$$

  - *Integration:*

$$\int y\ dy = -\int x\ dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

  - *Allgemeine Lösung der Differentialgleichung:*

$$y^2 = 2C - x^2 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 2C$$

## Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

- Dies ist die Gleichung eines *Mittelpunktkreises* mit dem Radius $R = \sqrt{2C}$, falls $C > 0$ ist.

  Für $C = 0$ erhalten wir den *Nullpunkt*, für $C < 0$ existieren *keine* Lösungen.

- *Spezielle Lösung für* $y(0) = 2$

$$\begin{aligned} y(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad C = 2 \\ &\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$

# Lösen spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

## Lösen spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(ax + by + c) \quad (\text{Substitution: } u = ax + by + c\ )$$

und

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{Substitution: } u = \frac{y}{x}\ )$$

lassen sich mittels der jeweils in Klammern angegebenen *Substitution* schrittweise wie folgt lösen:

1. Durchführung der *Substitution*.
2. *Lösen* der neuen Differentialgleichung 1. Ordnung für die Hilfsfunktion $u$ durch *Trennung der Variablen*.
3. *Rücksubstitution* und *Auflösen* der Gleichung nach $y$.

# Lösen spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

Beispiel

- Die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = \frac{x+2y}{x} = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ und lässt sich daher durch die *Substitution* $u = \frac{y}{x}$ wie folgt lösen:

  - *Substitution*:

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{d.h.} \quad y = xu, \qquad y' = u + xu'$$

$$y' = 1 + 2\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u + xu' = 1 + 2u \quad \text{oder} \quad xu' = 1 + u$$

# Lösen spezieller Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Substitution

- *Lösen durch Trennung der Variablen:*

$$
\begin{aligned}
x\frac{du}{dx} = 1 + u \quad &\Rightarrow \quad \frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \\
&\Rightarrow \quad \ln|u+1| = \ln|x| + \ln|C| \\
&\Rightarrow \quad |u+1| = |Cx|
\end{aligned}
$$

- *Rücksubstitution:*

$$y = xu = x(Cx-1) = Cx^2 - x$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{x+2y}{x}$ besitzt somit die Gestalt

$$y = Cx^2 - x \qquad (C \in \mathbb{R}).$$

# Definition einer linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung

**Definition**

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst *linear*, wenn sie in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

darstellbar ist.

**Anmerkung**

- Die Funktion $g(x)$ wird als *Störfunktion* oder *Störglied* bezeichnet. *Fehlt* das *Störglied*, d.h. ist $g = 0$, so heisst die lineare Differentialgleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

# Definition: lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

**Beispiel**

- Die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung sind *linear*:

| | |
|---|---|
| $y' - xy = 0$ | Homogene Dgl |
| $xy' + 2y = e^x$ | Inhomogene Dgl |
| $y' + tan(x) \cdot y = 2sin(2x)$ | Inhomogene Dgl |

- *Nicht-linear* sind folgende Differentialgleichungen 1. Ordnung:

| | |
|---|---|
| $y' = 1 - y^2$ | ($y$ tritt in der 2. Potenz auf) |
| $yy' + x = 0$ | (Die Differentialgleichung enthält ein Produkt $yy'$) |

# Lösen der homogenen linearen Differentialgleichung

## Lösen der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine *homogene* lineare Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

wird durch *Trennung der Variablen* gelöst.
Die *allgemeine* Lösung ist dann in der Form

$$y = C \cdot \exp\left(-\int f(x)dx\right) \quad (C \in \mathbb{R})$$

darstellbar.

## Beispiele

- $y' + \frac{1}{x^2} y = 0 \, (x \neq 0)$ lässt sich lösen:

$$y = C \cdot \exp\left(-\int \frac{1}{x^2}\, dx\right) = C \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

- $y' - 2xy = 0, \quad y(0) = 5$ lässt sich lösen:

$$\begin{aligned} y &= C \cdot \exp\left(-\int (-2x)\, dx\right) \\ &= C \cdot \exp\left(x^2\right) \\ &= 5 \cdot \exp\left(x^2\right) \quad mit \quad y(0) = 5 \end{aligned}$$

# Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch “Variation der Konstanten”

## Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung durch “Variation der Konstanten”

Eine *inhomogene* lineare Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

lässt sich durch “ Variation der Konstanten” schrittweise wie folgt lösen:

- *Lösen* der zugehörigen *homogenen* Differentialgleichung $y' + f(x) \cdot y = 0$ durch *Trennung der Variablen:*

$$y = K \cdot \exp(-\int f(x)dx)$$

# Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

**Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung durch "Variation der Konstanten"**

- *Variation der Konstanten:* die Integrationskonstante $K$ wird durch eine Funktion $K(x)$ ersetzt. Den Lösungsansatz

$$y = K(x) \cdot \exp(-\int f(x)dx)$$

setzt man in die *inhomogene* lineare Differentialgleichung ein und erhält eine einfache Differentialgleichung 1. Ordnung für die Faktorfunktion $K(x)$, die durch Integration direkt gelöst werden kann.

# Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

Beispiele

- $$y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$$

  Wir lösen zunächst die zugehörige *homogene* Differentialgleichung durch *Trennung der Variablen*.

  Die allgemeine Lösung der *homogenen* Gleichung lautet somit:

  $$\begin{aligned} y &= K \exp(-\int \frac{1}{x} dx) \\ &= \frac{K}{x} \quad (K \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

# Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Die *inhomogene* Differentialgleichung lösen wir durch *Variation der Konstanten* $(K \to K(x))$:

  $$\text{Lösungsansatz} \quad y = \frac{K(x)}{x}, \quad y' = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2}$$

  Wir erhalten:

  $$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} + \frac{K(x)}{x^2} \\ &= \frac{K'(x)}{x} \end{aligned}$$

# Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch “Variation der Konstanten”

- Wir erhalten die Differentialgleichung:

$$\frac{K'(x)}{x} = \cos(x)$$

Durch *Integration* folgt hieraus:

$$K(x) = \int x \cdot \cos(x)\ dx = \cos(x) + x\sin(x) + C$$

Die *inhomogene* Differentialgleichung besitzt damit die *allgemeine* Lösung

$$y(x) = \frac{\cos(x) + x\sin(x) + C}{x}$$

# Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Beispiel

$$y' - 3y = x \cdot e^{4x}$$

Die zugehörige *homogene* Differentialgleichung

$$y' - 3y = 0$$

wird durch *Trennung der Variablen* gelöst.
Ihre *allgemeine* Lösung ist

$$y_0(x) = K \cdot e^{3x} \qquad (K \in \mathbb{R})$$

Die *inhomogene* Differentialgleichung lösen wir durch den Ansatz

$$y = K(x) \cdot e^{3x}$$

# Lösen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung durch "Variation der Konstanten"

- Wir fügen die Terme

$$y = K(x) \cdot e^{3x}, \quad y'(x) = K'(x)e^{3x} + 3 \cdot K(x)e^{3x}$$

in die *inhomogene* Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned} y' - 3y &= K'(x)e^{3x} + 3K(x)e^{3x} - 3K(x)e^{3x} = x \cdot e^{4x} \\ K'(x)e^{3x} &= x \cdot e^{4x} \quad \text{oder} \quad K'(x) = x \cdot e^{x} \end{aligned}$$

- Durch *Integration* folgt:

$$K(x) = (x-1) \cdot e^{x} + C$$

- Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung lautet damit:

$$\begin{aligned} y &= K(x) \cdot e^{3x} \\ &= \big((x-1) \cdot e^{x} + C\big) \cdot e^{3x} \end{aligned}$$

# Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

## Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

Die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

ist als *Summe* aus der *allgemeinen* Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung

$$y' + f(x) \cdot y = 0$$

und einer (beliebigen) *partikulären* Lösung $y_p = y_p(x)$ der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung darstellbar:

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

# Lösen einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Lösen einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

- **Homogene lineare Differentialgleichung** $y' + ay = 0 \ (a \neq 0)$
  Die *homogene* lineare Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung
  $$y_0 = C \cdot e^{-ax} \qquad (C \in \mathbb{R})$$
- **Inhomogene lineare Differentialgleichung** $y' + ay = g(x) \ (a \neq 0)$
  Die *inhomogene* Differentialgleichung wird entweder durch *Variation der Konstanten* oder durch *Suchen einer partikulären Lösung* gelöst.

# Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

## Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

| Störfunktion $g(x)$ | Lösungsansatz $y_p(x)$ |
|---|---|
| Konstante Funktion | Konstante Funktion $y_p = c_0,\ c_0 \in \mathbb{R}$ |
| Polynom vom Grad $n$ | Polynom vom Grad $n$ <br> $y_p(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ <br> *Parameter:* $c_0, c_1 \ldots, c_n$ |

# Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

## Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

| Störfunktion $g(x)$ | Lösungsansatz $y_p(x)$ |
|---|---|
| $g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$ | $y_p(x) = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$ oder $y_p(x) = C \cdot \sin(\omega x + \phi)$ <br> Parameter: $C_1, C_2$ bzw. $C, \phi$ |
| $g(x) = A \cdot \exp(bx)$ | $y_p(x) = \begin{cases} C \cdot \exp(bx) & \text{für } b \neq -a \\ Cx \cdot \exp(bx) & \text{für } b = -a \end{cases}$ <br> Parameter: $C$ |

# Lösen einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Beispiel

-
$$y' + 5y = -26 \cdot \sin(x), \quad y(0) = 0$$

*Allgemeine* Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' + 5y = 0$:

$$y_0 = C \cdot e^{-5x} \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Eine partikuläre Lösung für die *inhomogene* Differentialgleichung ist

$$y_p = C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x)$$

Bestimmung der *Parameter* $C_1$ und $C_2$:

$$\begin{aligned} y_p' &= C_1 \cdot \cos(x) - C_2 \cdot \sin(x) \\ y_p' + 5y_p &= -26 \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

- Ordnen der Glieder:

  $$(5C_1 - C_2) \cdot \sin(x) + (C_1 + 5C_2) \cdot \cos(x) = -26 \cdot \sin(x) + 0 \cdot \cos(x)$$

  *Koeffizientenvergleich* führt zu dem *linearen Gleichungssystem*

  $$\begin{aligned} 5C_1 - C_2 &= -26 \\ C_1 + 5C_2 &= 0 \end{aligned}$$

  Es folgt dann

  $$\begin{aligned} C_2 &= 1 \\ C_1 &= -5 \end{aligned}$$

  Die *partikuläre* Lösung ist damit eindeutig bestimmt:

  $$y_p(x) = -5 \cdot \sin(x) + \cos(x)$$

- Die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung lautet somit:

$$y = y_0 + y_p = C \cdot e^{-5x} - 5 \cdot \sin(x) + \cos(x) \quad (C \in \mathbb{R})$$

Den Parameter $C$ berechnen wir wie folgt aus dem *Anfangswert* $y(0) = 0$:

$$y(0) = 0 \Rightarrow C + 1 = 0 \Rightarrow C = -1$$

Die *Anfangswertaufgabe* besitzt demnach die *Lösung*

$$y = y_0 + y_p = -e^{-5x} - 5 \cdot \sin(x) + \cos(x)$$

# Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Definition**

Eine Differentialgleichung vom Typ

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

heisst *lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten* $(a, b \in \mathbb{R})$.

## Anmerkungen

- Kennzeichen einer *linearen* Differentialgleichung 2. Ordnung sind:
  - $y$, $y'$ und $y''$ treten *linear*, d.h. in der *1. Potenz* auf.
  - "Gemischte Produkte" wie $yy'$,$yy''$ und $y'y''$ sind in der Differentialgleichung *nicht* enthalten.

# Definition einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Beispiele

- Die folgenden Differentialgleichungen 2. Ordnung sind *linear* und besitzen *konstante* Koeffizienten:

| | |
|---|---|
| $y + y'' = 0$ | Homogene Dgl |
| $y'' + 2y' - 3y = 2x - 4$ | Inhomogene Dgl |
| $2y'' - 4y' + 20y = \cos(x)$ | Inhomogene Dgl |

- Die Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$y'' + xy' + y = 0 \quad \text{und} \quad x^3y'' + x^2y' - xy = e^x$$

sind zwar *linear*, besitzen jedoch *nicht-konstante* Koeffizienten.

# Allgemeine Eigenschaften einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Allgemeine Eigenschaften einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine *homogene* lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

besitzt folgende Eigenschaften:

- Ist $y_1(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung, so ist auch die mit einer *beliebigen* Konstanten $C$ multiplizierte Funktion

  $$y(x) = C \cdot y_1(x)$$

  eine Lösung der Differentialgleichung ($C \in \mathbb{R}$).

# Allgemeine Eigenschaften einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Allgemeine Eigenschaften einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- Sind $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei *Lösungen* der Differentialgleichung, so ist auch die aus ihnen gebildete *Linearkombination*

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

  eine Lösung der Differentialgleichung ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$)

- Ist $y(x) = u(x) + j \cdot v(x)$ eine *komplexwertige Lösung* der Differentialgleichung, so sind auch *Realteil* $u(x)$ und *Imaginärteil* $v(x)$ *Lösungen* der Gleichung ($j$ bezeichnet die imaginäre Einheit).

# Allgemeine Eigenschaften einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

## Beispiel

- Gegeben ist die sogenannte *Schwingungsgleichung*

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

*Partikuläre Lösungen* sind unter anderem

$$y_1 = \sin(\omega x) \quad \text{und} \quad y_2 = \cos(\omega x),$$

denn bsp. gilt für $y_1 = \sin(\omega x)$:

$$y_1'' = (\omega \cdot \cos(\omega x))' = -\omega^2 \cdot \sin(\omega x) \quad \Rightarrow \quad y_1'' + \omega^2 \cdot y_1 = 0$$

Damit sind auch die folgenden Funktionen *Lösungen* der Schwingungsgleichung $y'' + \omega^2 y = 0$:

$$y = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x) \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

**Definition**

Zwei Lösungen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ einer *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

werden als *Basisfunktionen* oder *Basislösungen* der Differentialgleichung bezeichnet, wenn die mit ihnen gebildete sogenannte *Wronski-Determinante*

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist.

**Anmerkung**

- Zwei *Basislösungen* $y_1(x)$ und $y_2(x)$ der *homogenen Differentialgleichung* werden auch als *linear unabhängige* Lösungen bezeichnet, d.h.

$$\text{aus} \quad C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0 \quad \text{folgt} \quad C_1 = C_2 = 0.$$

# Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

## Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

Die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ einer *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

ist als *Linearkombination* zweier *linear unabhängiger* Lösungen (*Basislösungen*) $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ in der Form

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

darstellbar ($C_1, C_2 \in \mathbb{R}$).

# Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

## Beispiel

- Die *Schwingungsgleichung* $y'' + \omega^2 y = 0$ hat unter anderem die Lösungen

$$y_1(x) = \sin(\omega x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = \cos(\omega x).$$

Diese bilden zwei *Basislösungen* der Differentialgleichung, da ihre Wronski-Determinante einen *von Null verschiedenen* Wert besitzt:

$$\begin{aligned} W(y_1; y_2) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \\ \omega\cos(x) & -\omega\sin(\omega x) \end{vmatrix} \\ &= -\omega \cdot \sin^2(\omega x) - \omega \cdot \cos^2(\omega x) \\ &= -\omega \end{aligned}$$

# Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

- Die *allgemeine* Lösung der *Schwingungsgleichung* $y'' + \omega^2 y = 0$ ist daher darstellbar in der Form

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) \\ &= C_1 \cdot \cos(\omega x) + C_2 \cdot \sin(\omega x). \end{aligned}$$

# Lösungsmenge einer homog. lin. Differentialgleichung 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

- Die *homogene* lineare Differentialgleichung 2. Ordnung $y'' - 4y' - 5y = 0$ besitzt unter anderem die Lösungen

  $$y_1(x) = e^{5x} \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^{-x}$$

  Sie bilden eine *Fundamentalbasis* der Differentialgleichung:

  $$\begin{aligned} W(y_1; y_2) &= \begin{vmatrix} e^{5x} & e^{-x} \\ 5e^{5x} & -e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= -6e^{4x} \end{aligned}$$

- Die *allgemeine* Lösung der Gleichung $y'' - 4y' - 5y = 0$ ist daher darstellbar in der Form

  $$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) \\ &= C_1 \cdot e^{5x} + C_2 \cdot e^{-x}. \end{aligned}$$

# Lösen einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Lösen einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Mit dem Lösunganasatz $y = e^{\lambda x}$ lässt sich eine *Fundamentalbasis* $y_1, y_2$ der *homogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = 0$$

gewinnen.
Die *Basislösungen* hängen dabei noch von der *Art* der Lösungen $\lambda_1, \lambda_2$ der zugehörigen *charakteristischen Gleichung*

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

ab, wobei die folgenden Fälle zu unterscheiden sind $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$:

# Lösen einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

## Lösen einer homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

- **Fall $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (reell)**

  *Fundamentalbasis:* $y_1 = \exp(\lambda_1 x), \quad y_2 = \exp(\lambda_2 x)$

  *Allgemeine Lösung:* $y = C_1 \cdot \exp(\lambda_1 x) + C_2 \cdot \exp(\lambda_2 x)$

- **Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = c$ (reell)**

  *Fundamentalbasis:* $y_1 = \exp(cx), \quad y_2 = x \cdot \exp(cx)$

  *Allgemeine Lösung:* $y = C_1 \cdot \exp(cx) + C_2 \cdot x \cdot \exp(cx)$

- **Fall $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\omega$ (konjugiert komplex)**

  *Fundamentalbasis:* $y_1 = \exp(\alpha x) \cdot \sin(\omega x), \quad y_2 = \exp(\alpha x) \cdot \cos(\omega x)$

  *Allgemeine Lösung:* $y = \exp(\alpha x)\,[C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)]$

Beweis:

- Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Den Ansatz

$$y = e^{\lambda x}, \;\; y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \;\; y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$$

setzen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten die folgende *quadratische* Bestimmungsgleichung für den Parameter $\lambda$:

$$\begin{gathered} y'' + ay' + by = \lambda^2 \exp(\lambda x) + a\lambda \cdot \exp(\lambda x) + b \cdot \exp(\lambda x) = 0 \\ (\lambda^2 + a\lambda + b) \cdot e^{\lambda x} = 0, \;\; \text{für alle } x \\ \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \end{gathered}$$

Sie wird als *charakteristische Gleichung* der homogenen Gleichung $y'' + ay' + by = 0$ bezeichnet und besitzt die Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

# Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

## Lösungsmenge einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die *allgemeine* Lösung $y = y(x)$ einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten vom Typ

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

ist als Summe aus der *allgemeinen* Lösung $y_0 = y_0(x)$ der zugehörigen *homogenen* linearen Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = 0$$

und einer (beliebigen) *partikulären* Lösung $y_p = y_p(x)$ der *inhomogenen* linearen Differentialgleichung darstellbar:

$$y(x) = y_p(x) + y_0(x)$$

# Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

## Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

| Störfunktion $g(x)$ | Lösungsansatz $y_p(x)$ |
|---|---|
| Polynom vom Grad $n$ | $y_p = \begin{cases} \mathcal{Q}_n(x) & b \neq 0 \\ x \cdot \mathcal{Q}_n(x) \quad \text{für} & b = 0,\ a \neq 0 \\ x^2 \cdot \mathcal{Q}_n(x) & b = 0,\ a = 0 \end{cases}$ <br> $\mathcal{Q}_n(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ <br> Polynom vom Grad $n$ <br> *Parameter:* $c_0, c_1 \ldots, c_n$ |

# Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

## Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

| Störfunktion $g(x)$ | Lösungsansatz $y_p(x)$ |
|---|---|
| Exponentialfunktion<br><br>$g(x) = Ae^{cx}$ | • $c$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung:<br><br>$y_p = A \cdot e^{cx}$<br><br>• c ist eine *einfache* Lösung der charakteristischen Gleichung:<br><br>$y_p = Ax \cdot e^{cx}$<br><br>• c ist eine *doppelte* Lösung der charakteristischen Gleichung:<br><br>$y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$ |

# Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

## Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

| Störfunktion $g(x)$ | Lösungsansatz $y_p(x)$ |
|---|---|
| Sinusfunktion <br> $g(x) = \sin(\beta x)$ <br> oder Kosinusfunktion <br> $g(x) = \cos(\beta x)$ <br> oder eine Linearkombination aus $\sin(\beta x)$ und $\cos(\beta x)$ | $j\beta$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung: <br> $y_p = A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)$ <br> oder <br> $y_p = C \cdot \sin(\beta x + \phi)$ <br> *Parameter:* $A, B$ oder $C, \phi$ |

# Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

## Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

| Störfunktion $g(x)$ | Lösungsansatz $y_p(x)$ |
|---|---|
| Sinusfunktion $$g(x) = \sin(\beta x)$$ oder Kosinusfunktion $$g(x) = \cos(\beta x)$$ oder eine Linearkombination aus $\sin(\beta x)$ und $\cos(\beta x)$ | $j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $$y_p = x\,[A \cdot \sin(\beta x) + B \cdot \cos(\beta x)]$$ oder $$y_p = Cx \cdot \sin(\beta x + \phi)$$ *Parameter:* $A, B$ oder $C, \phi$ |

# Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

## Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

| Störfunktion $g(x)$ | Lösungsansatz $y_p(x)$ |
|---|---|
| $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$<br>oder<br>$g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$<br>($P_n$ Polynomfunktion vom Grade $n$) | $c + j\beta$ ist keine Lösung der charakteristischen Gleichung:<br>$y_p = e^{cx}\left[\mathcal{Q}_n \cdot \sin(\beta x) + \mathcal{R}_n \cdot \cos(\beta x)\right]$<br>$\mathcal{Q}_n, \mathcal{R}_n$: Polynom vom Grade $n$<br>*Parameter:* Koeffizienten der Polynome $\mathcal{Q}_n$ und $\mathcal{R}_n$ |

# Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

## Lösungsansatz für eine *partikuläre Lösung* $y_p(x)$

| Störfunktion $g(x)$ | Lösungsansatz $y_p(x)$ |
|---|---|
| $g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$<br>oder<br>$g(x) = P_n \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$<br>($P_n$ Polynomfunktion vom Grade $n$) | $c + j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung:<br>$y_p = x \cdot e^{cx} \left[\mathcal{Q}_n \cdot \sin(\beta x) + \mathcal{R}_n \cdot \cos(\beta x)\right]$<br>$\mathcal{Q}_n, \mathcal{R}_n$: Polynom vom Grade $n$<br>*Parameter:* Koeffizienten der Polynome $\mathcal{Q}_n$ und $\mathcal{R}_n$ |