Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik I+II
Frühlingsemester 2019
Kapitel 8: Lineare Algebra
8.4 Lineare Gleichungssysteme

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

8. Lineare Algebra: 4. Lineare Gleichungssysteme

- Allgemeine Vorbetrachtungen
- Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems
- Quadratische lineare Gleichungssysteme
  - Homogenes lineares (n, n)-System
  - Cramersche Regel
- Gauss-Jordan-Verfahren
- Lineare Unabhängigkeit von Vektoren
  - Linear unabhängige bzw. abhängige Vektoren
  - Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren
- Ein Anwendungbeispiel

Literatur

- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 69 – 99,**
  Seiten 154 – 158 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Allgemeine Vorbetrachtungen

Ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen und n Unbekannten hat die Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

(wird als *lineares* (m,n)-*System* bezeichnet). Es lässt sich unter Verwendung von *Matrizen* in einer besonders übersichtlichen Form darstellen. Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

wobei $\mathbf{x}$ als *Lösungsvektor* bezeichnet wird.
In *Matrizenschreibweise* kann das lineare (m, n)-System geschrieben werden als

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c}.$$

Allgemeine Vorbetrachtungen

Anmerkungen

- Das lineare Gleichungssystem heisst *homogen*, wenn $\mathbf{c} = 0$ ist. Ein *inhomogenes* System liegt vor, wenn $\mathbf{c} \neq 0$ ist.
- Für $m = n$ liegt der in den Anwendungen besonders wichtige *Sonderfall* eines *quadratischen* linearen (n, n)-Gleichungssystem vor.
- Bei späteren Untersuchungen über das *Lösungsverhalten* eines linearen Gleichungssystem spielt die sog. Koeffizientenmatrix

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

eine bedeutende Rolle.

Allgemeine Vorbetrachtungen

Beispiel

- Das lineare $(2,3)$-System

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 8 \end{array}$$

lautet in *Matrizenform*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Allgemeine Vorbetrachtungen

Beispiel

- Das in *Matrizenform* vorliegende lineare $(3,3)$-Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

lautet in der herkömmlichen Schreibweise

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & & & = & 3. \end{array}$$

Die Lösungsmenge eines linearen (m, n)-Systems

Man kann ein lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ mit Hilfe des *Gauss'schen Algorithmus* lösen. Wir erinnern an die folgende Aussage über das *Lösungsverhalten* linearer Gleichungssysteme.

Zur Lösungsmenge eines linearen (m, n)-Systems

1. **Inhomogenes lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$**
   Das System besitzt entweder genau *eine* Lösung, *unendlich* viele Lösungen oder überhaupt *keine* Lösung.
2. **Homogenes lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$**
   Das System besitzt entweder genau eine Lösung, nämlich die *triviale* Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, oder *unendlich* viele Lösungen (darunter die triviale Lösung).

Über die Lösungsmenge eines linearen (m, n)-Systems

Jedoch konnte dabei die Entscheidung darüber, ob ein vorgegebenes lineares (m, n)-System überhaupt *lösbar* ist, und ob das System dann *eine* Lösung oder gar *unendlich* viele Lösungen besitzt, erst im Verlaufe der Rechnung getroffen werden.
Häufig interessieren in den Anwendungen weniger die Lösungen an sich als das *Lösungsverhalten* des linearen Systems.
Wir werden uns daher vorrangig mit den folgenden Problemstellungen befassen:

1. Unter *welchen* Voraussetzungen ist ein lineares Gleichungssystem überhaupt *lösbar*?
2. *Wann* besitzt ein lineares Gleichungssystem genau *eine* Lösung, *wann* dagegen *unendlich* viele Lösungen?

Gauss'scher Algorithmus

Der *Gauss'sche Algorithmus* ist ein in der Praxis weit verbreitetes Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme. Er beruht auf *äquivalenten Umformungen* des linearen Systems, die wir im folgenden nochmals einzeln aufführen:

1. Zwei Gleichungen dürfen miteinander *vertauscht* werden.
2. Jede Gleichung darf mit einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl multipliziert werden.
3. Zu jeder Gleichung darf ein beliebiges Vielfaches einer *anderen* Gleichung *addiert* werden.

Mit Hilfe *äquivalenter Umformungen* lässt sich ein lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ in ein *äquivalentes gestaffeltes* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ überführen, aus dem dann (im Falle der *Lösbarkeit* des Systems) die unbekannten Grössen $x_1, x_2, ..., x_n$ *sukzessiv* berechnet werden können.

Gauss'scher Algorithmus

Als Beispiel nehmen wir das lineare $(3,3)$-System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & = & -28 \end{array}$$

und unterwerfen dieses System der Reihe nach den folgenden *äquivalenten Umformungen (Gauss'scher Algorithmus)*:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 7 & \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 0 & (-2\cdot Z_1) \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & = & -28 & (-2\cdot Z_1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 7 & \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -14 & \\ & - & 3x_2 & + & 12x_3 & = & -42 & (-3\cdot E_2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -14 \\ & & & & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

Gauss'scher Algorithmus

Wir haben damit das Gleichungssystem in das äquivalente und *gestaffelte* System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -14 \\ & & & & 0x_3 & = & 0 \end{array}$$

übergeführt, das nun *sukzessiv* von unten nach oben gelöst werden kann. Die letzte Gleichung $0x_3 = 0$ ist dabei für jedes $x_3 \in \mathbb{R}$ erfüllt, d.h. die Unbekannte x_3 ist als *frei wählbarer Parameter* zu betrachten (wir setzen $x_3 = t$).
Das lineare Gleichungssystem besitzt somit *unendlich* viele (noch von einem Parameter t) abhängige Lösungen, die in der folgenden Form darstellbar sind:

$$\begin{array}{rcc} x_1 & = & -6t - 21 \\ x_2 & = & 4t + 14 \\ x_3 & = & t \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -6t - 21 \\ 4t + 14 \\ t \end{pmatrix}$$

Gauss'scher Algorithmus

Bei den beschriebenen äquivalenten Umformungen des System wurde sowohl die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ als auch die erweiterte Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ in eine jeweils *ranggleiche* Matrix mit *trapezförmiger* Gestalt übergeführt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Rg(\mathbf{A}) = Rg(\mathbf{A}^*) = 2$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & -28 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$Rg(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = Rg(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = 2$$

Lösungsverhalten eines (m, n)-Gleichungssystems

Lösen eines linearen Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ mit Hilfe des Gauss'schen Algorithmus

Den *äquivalenten Umformungen* eines linearen Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ entsprechen *elementare Zeilenumformungen* in der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und der *erweiterten* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$. Im Falle der *Lösbarkeit* des linearen Systems lassen sich die Lösungen wie folgt gewinnen:

1. Zunächst wird die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ (und damit auch die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ selbst) mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen* in eine *ranggleiche* Matrix mit *Trapezform* übergeführt:

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}^* \qquad \text{und} \qquad (\mathbf{A}|\mathbf{c}) \Rightarrow (\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$$

2. Das lineare Gleichungssystem liegt dann in der *gestaffelten* Form $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ vor und lässt sich *sukzessiv* von unten nach oben lösen.

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

Wir untersuchen in diesem Abschnitt das *Lösungsverhalten* eines linearen (m, n)-Systems vom allgemeinen Typ $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$
in der Komponentenschreibweise

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & c_m
\end{array}
$$

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

Mit Hilfe *äquivalenter Umformungen* lässt sich dieses System in ein *äquivalentes gestaffeltes* System der Form

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}^* x_1 & + & a_{12}^* x_2 & + & \cdots & + & a_{1r}^* x_r & + & a_{1,r+1}^* x_{r+1} & + \cdots + & a_{1n}^* x_n & = & c_1^* \\
 & & a_{22}^* x_2 & + & \cdots & + & a_{2r}^* x_r & + & a_{2,r+1}^* x_{r+1} & + \cdots + & a_{2n}^* x_n & = & c_2^* \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{rr}^* x_r & + & a_{r,r+1}^* x_{r+1} & + \cdots + & a_{rn}^* x_n & = & c_r^* \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & c_{r+1}^* \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & \vdots \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & c_m^*
\end{array}
$$

überführen ($a_{ii}^* \neq 0,\ i = 1, 2, ..., r$).

Unter Verwendung von *Matrizen* lässt sich dafür auch schreiben $\mathbf{A}^* \mathbf{x} = \mathbf{c}^*$.

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

Der Übergang vom linearen System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ zum *äquivalenten* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ können wir *symbolisch* wie folgt darstellen:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{c} \xrightarrow[\text{Umformungen}]{\text{Äquivalente}} \mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}^*$ geht dabei aus der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$ aus der *erweiterten* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ durch *elementare Zeilenumformungen* hervor:

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} \mid \mathbf{c}) \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{Zeilenumformungen}]{\text{Elementare}} \left\{\begin{matrix} \mathbf{A}^* \\ (\mathbf{A}^* \mid \mathbf{c}^*) \end{matrix}\right.$$

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

$$
(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = \left(\begin{array}{ccccccc|c}
a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1r}^* & a_{1,r+1}^* & \cdots & a_{1n}^* & c_1^* \\
0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2r}^* & a_{2,r+1}^* & \cdots & a_{2n}^* & c_2^* \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_{rr}^* & a_{r,r+1}^* & \cdots & a_{rn} & c_r^* \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1}^* \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+2}^* \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m^*
\end{array}\right)
$$

Das lineare (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ bzw. $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ ist offensichtlich nür *lösbar*, wenn *sämtliche* Elemente c_{r+1}^*, c_{r+2}^*, ..., c_m^* verschwinden.

Anderfalls erhalten wir *widersprüchliche* Gleichungen, in denen die *linke* Seite den Wert Null und die *rechte* Seite einen von Null *verschiedenen* Wert besitzt.

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

Die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$ muss daher im Falle der *Lösbarkeit* die spezielle Form

$$(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1r}^* & a_{1,r+1}^* & \cdots & a_{1n}^* & c_1^* \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2r}^* & a_{2,r+1}^* & \cdots & a_{2n}^* & c_2^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr}^* & a_{r,r+1}^* & \cdots & a_{rn} & c_r^* \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

annehmen.

Beide Matrizen, sowohl $\mathbf{A}^*$ als auch $(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$, sind dann von *trapezförmiger* Gestalt und enthalten jeweils in den letzten $m - r$ Zeilen nur *Nullen*. Sie stimmen daher in ihrem *Rang* überein:

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = r$$

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Gleichungssystems

Da das System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ durch *äquivalente Umformungen* bzw. *elementare Zeilenumformungen* aus dem System $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ hervorgeht, sind $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^*$ bzw. $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ und $(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$ jeweils *ranggleich*.
Ein lineares (m, n)-System $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ist demnach nur *lösbar*, wenn $\mathbf{A}$ und $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ vom *gleichen Rang* sind.
Die Bedingung $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$ ist somit *notwendig und hinreichend* für die Lösbarkeit eines linearen Systems.

Über die lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems

Ein lineares (m, n)-System $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ ist dann und nur dann *lösbar*, wenn der Rang der Koeffizienmatrix $\mathbf{A}$ mit dem Rang der *erweiterten* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ *übereinstimmt*:

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$$

$(r \leq m;\ \ r \leq n)$

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems

Anmerkungen

- Ein lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ ist *unlösbar*, wenn $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ ist. In diesem Fall ist stets $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) < \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$.
- In einem *homogenen* linearen (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, ist die *Lösbarkeitsbedingung* $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$ *stets* erfüllt.
  Dies weil sich die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{0})$ von der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ lediglich durch eine *zusätzliche* Spalte mit lauter *Nullen* unterscheidet, die aber den Rang der Matrix in *keiner* Weise verändert.

Fallunterscheidung bei einem lösbaren linearen System

Im Falle der *Lösbarkeit* eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}$ müssen wir noch die Fälle $r = n$ und $r < n$ unterscheiden.

Fall: $r = n$

Das *gestaffelte* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ besitzt für $r = n$ die *quadratische* Form

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}^* x_1 & + & a_{12}^* x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}^* x_n & = & c_1^* \\
 & & a_{22}^* x_2 & + & \cdots & & a_{2n}^* x_n & = & c_2^* \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{nn}^* x_n & = & c_n^*
\end{array}$$

mit $a_{ii}^* \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Fallunterscheidung bei einem lösbaren linearen System

Fall: $r = n$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}^*$ ist eine (obere) *Dreiecksmatrix*, die *erweitete* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$ besitzt die *Trapezform*

$$(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* & c_1^* \\ 0 & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* & c_2^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^* & c_n^* \end{array}\right)$$

mit $a_{ii}^* \neq 0$, $i = 1, 2, ..., n$.
Das lineare Gleichungssystem besitzt somit genau *eine* Lösung, die man *sukzessiv* von unten nach oben aus dem *gestaffelten* System berechnet.

Fallunterscheidung bei einem lösbaren linearen System

Fall: $r < n$

Das *gestaffelte* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ besitzt für $r < n$ die *quadratische* Form

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}^* x_1 & + & a_{12}^* x_2 & + & \cdots & + & a_{1r}^* x_r & + & a_{1,r+1}^* x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{1n}^* x_n & = & c_1^* \\
 & & a_{22}^* x_2 & + & \cdots & + & a_{2r}^* x_r & + & a_{2,r+1}^* x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{2n}^* x_n & = & c_2^* \\
 & & & & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{rr}^* x_r & + & a_{r,r+1}^* x_{r+1} & + & \cdots & + & a_{rn}^* x_n & = & c_r^*
\end{array}
$$

mit $a_{ii}^* \neq 0$, $i = 1, 2, ..., r$.
Wir haben in diesem Fall mehr Unbekannte (n) als Gleichungen (r): $n > r$.
Daher sind $n - r$ der Unbekannten (z.B. $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$) *frei wählbare Grössen (Parameter)*.
Das gestaffelte System wird dann wiederum *sukzessiv* von unten nach oben gelöst.
Wir erhalten *unendlich* viele Lösungen, die noch von $n - r$ Parametern abhängen.

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

Lösungsverhalten eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

1. Ein lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ ist nur *lösbar*, wenn Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ *ranggleich* sind:

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$$

2. Im Falle der *Lösbarkeit* besitzt das lineare System die folgende *Lösungsmenge*:

   Für $r = n$: Genau *eine* Lösung

   Für $r < n$: Unendlich viele Lösungen, wobei $n - r$ der insgesamt n Unbekannten *frei wählbare Parameter* sind.

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$: Kriterien

Lineares (m, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

- $Rg(\mathbf{A}) = Rg(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$
  - $r = n$: genau eine Lösung
  - $r < n$: unendlich viele Lösungen mit $n - r$ Parametern
- $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$
  - Keine Lösung

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

Beispiel

Wir zeigen mit Hilfe von *Determinanten*, dass das lineare $(3, 2)$-System

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & = & 2 \\ -x_1 & + & 5x_2 & = & 4 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & = & 12 \end{array}$$

nicht lösbar ist. Der Rang der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

beträgt $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = 2$, da es wenigstens *eine* von Null verschiedene 2-*reihige* Unterdeterminante gibt, nämlich

$$\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -27 \neq 0.$$

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

Die *erweiterte* Koeffizientenmatrix

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) \quad = \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 12 \end{array}\right)$$

ist *quadratisch* und sogar *regulär*:

$$\det(\mathbf{A}|\mathbf{c}) \quad = \quad \left|\begin{array}{ccc} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 5 & 4 \\ 5 & 2 & 12 \end{array}\right| = -26 \neq 0.$$

Daraus folgt $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 3$. Somit ist $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$. Das vorliegende Gleichungssystem ist daher *unlösbar*.

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

Beispiel

Wir untersuchen mit Hilfe der *Matrizenrechnung* das Lösungsverhalten des folgenden $(4, 3)$-Systems:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 6 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & & & = & 3 \end{array}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems wird zunächst den folgenden *elementaren Zeilenumformungen* unterworfen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} := Z_2 \\ := Z_1 \\ \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -4Z_1 \\ +Z_1 \\ -3Z_1 \end{array}$$

Lösbarkeit eines linearen (m,n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +2Z_2 \\ -Z_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ :14 \\ :3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +Z_3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*)$$

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3, \qquad \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = 3$$

Das lineare Gleichungssystem ist somit wegen $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 3$ *lösbar* und besitzt genau *eine* Lösung, da $r = n = 3$ ist.

Lösbarkeit eines linearen (m, n)-Systems $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$

Die Lösung berechnen wir aus dem gestaffelten System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{c}^*$ *sukzessiv*:

- *Gestaffeltes System:*

$$
\begin{array}{rrrcrcrcr}
x_1 & & + \ 2x_3 & = & 0 & \Rightarrow & x_1 & = & 2 \ \uparrow \\
 & -\ x_2 & - \ 9x_3 & = & 6 & \Rightarrow & x_2 & = & 3 \ \uparrow \\
 & & - \ x_3 & = & 1 & \Rightarrow & x_3 & = & -1
\end{array}
$$

- *Lösung:* $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = -1$

Quadratische lineare Gleichungssysteme: Lösungsverhalten

Für $m = n$ erhalten wir den in den Anwendungen besonders häufigen und wichtigen *Sonderfall* eines *quadratischen* linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{nn}x_n & = & c_n \end{array}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist dabei *quadratisch*, die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ vom Typ $(n, n+1)$:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_n \end{array}\right)$$

Inhomogenes lineares (n, n)-System

- Nach den Ausführungen über die linearen (m, n)-Systeme, ist ein inhomogenes lineares (n, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ nur *lösbar*, wenn

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r$$

gilt.

- Ein lineares (n, n)-System besitzt dabei genau *eine* Lösung, wenn $r = n$ und somit $\mathbf{A}$ eine *reguläre* Matrix ist, d.h. falls $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ gilt. Ist die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ dagegen *singulär*, d.h. ist $\det(\mathbf{A}) = 0$, so erhalten wir entweder unendlich viele Lösungen, falls

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r < n$$

ist, oder überhaupt keine Lösung, wenn nämlich

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$$

ist.

Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n, n)-Systems

- Inhomogenes (n, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$
  - $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
    - $r = n$: genau *eine* Lösung
  - $\det(\mathbf{A}) = 0$
    - $\text{Rg}(\mathbf{A}) = \text{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = r < n$: *unendlich* viele Lösungen mit $n - r$ Parametern
    - $\text{Rg}(\mathbf{A}) \neq \text{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$: *keine* Lösung

Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n, n)-Systems

Beispiel

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ des *inhomogenes* linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ist *regulär:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n, n)-Systems

Das lineare (3-3)-System besitzt demnach genau *eine* Lösung, die wir mit Hilfe das *Gauss'schen Algorithmus* bestimmen.
Das *gestaffelte* System lautet damit:

$$\begin{array}{rcrcrcr@{\quad}c@{\quad}rcrl} -\,x & - & y & - & 3z & = & -5 & \Rightarrow & x & = & 6 & \\ & & y & - & 4z & = & -8 & \Rightarrow & y & = & -4 & \uparrow \\ & & & & 4z & = & 4 & \Rightarrow & z & = & 1 & \uparrow \end{array}$$

Es wird durch $x = 6$, $y = -4$, $z = 1$ gelöst.

Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n, n)-Systems

Wir zeigen mit Hilfe von *Determinanten*, dass das *inhomogene* lineare $(3, 3)$-System

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

nicht *lösbar* ist.
Zunächst einmal ist die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ wegen

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

singulär. Daher ist ihr Rang *kleiner* als 3:

$$\operatorname{Rg}(\mathbf{A}) < 3$$

Die *erweiterte* Koeffizientenmatrix

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

besitzt den Rang $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 3$, da es *eine* von Null verschiedene *3-reihige* Unterdeterminante von $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ gibt, nämlich

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -21 \neq 0.$$

Somit ist $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) \neq \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$, d.h. das vorliegende (3,3)-System ist *unlösbar*.

Lösbarkeit eines inhomogenen linearen (n, n)-Systems

Beispiel

Wir bestimmen die Lösungsmenge des *inhomogenen* linearen $(4,4)$-Systems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5 \\ -\ x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 8x_4 & = & 5 \end{array}$$

mit Hilfe der *Matrizenrechnung*.

In der *erweiterten* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{c})$ werden die folgenden *elementaren Zeilenumformungen* vergenommen:

$$(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 8 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{r} \\ \\ +Z_1 \\ -2Z_1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -Z_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (\mathbf{A}^*|c^*)$$

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 3 = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*|\mathbf{c}^*) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c})$$

Die *erweiterte* Koeffizientenmatrix hat jetzt die gewünschte *Trapezform*. Wegen $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{c}) = 3$ ist das lineare System *lösbar*, besitzt aber *unendlich* viele Lösungen mit *einem* Parameter, da $n - r = 4 - 3 = 1$ ist.

Diese Lösungen bestimmen wir aus dem *gestaffelten* System

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5 \\ & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \end{array}$$

Wir wählen x_4 als *Parameter* $x_4 = t$ $(t \in \mathbb{R})$. Für die übrigen Unbekannten erhalten wir dann *sukzessiv* folgende *parameterabhängige* Werte:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 & \Rightarrow & x_3 & = & t - 4 \\ & & 2x_2 & & & + & 2x_4 & = & 5 & \Rightarrow & x_2 & = & -t + 2.5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 0 & \Rightarrow & x_1 & = & -3t + 1.5 \end{array}$$

Das lineare System besitzt somit die *unendliche Lösungsmenge*

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 & = & -3t + 1.5 \\ x_2 & = & -t + 2.5 \\ x_3 & = & t - 4 \\ x_4 & = & t \end{array} \right\} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Homogenes lineares (n, n)-System

Ein *homogenes* lineares (n, n)-System von Typ

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & 0 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & a_{nn}x_n & = & 0
\end{array}$$

ist als *Sonderfall* eines homogenen (m, n)-Systems *stets* lösbar, da die *erweiterte* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\mathbf{0})$ *ranggleich* mit der (quadratischen) Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist:

$$\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}|\mathbf{0}) = r$$

Homogenes lineares (n, n)-System

Das *homogene* (n, n)-System besitzt dabei genau *eine* Lösung, nämlich die *triviale Lösung* $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ oder $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, wenn die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ *regulär*, d.h. $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist.

Nicht-triviale Lösungen, d.h. von der trivialen Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *verschiedene* Lösungen, gibt es nur, wenn $\mathbf{A}$ *singulär*, d.h. $\det \mathbf{A} = 0$ ist. In diesem Fall existieren *unendlich* viele Lösungen, die noch von $n - r$ Parametern abhängen, wobei r der Rang von $\mathbf{A}$ und $(\mathbf{A}|\mathbf{0})$ ist.

Kriterien für die Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

Homogenes (n, n)-System $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$\det(\mathbf{A}) \neq 0$

Genau *eine* Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (triviale Lösung)

$\det(\mathbf{A}) = 0$

Unendlich viele Lösungen mit $n - r$ Parametern (darunter die *triviale* Lösung)

Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems

Beispiel

Wir untersuchen die *Lösungsverhalten* des *homogenen* linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ ist wegen

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

singulär. Das homogene Gleichungssystem besitzt somit *nicht-triviale* Lösungen.

Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems

Wir überführen nun das homogene System $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ mit Hilfe *elementarer Zeilenumformungen* in ein *äquivalentes gestaffeltes* System $\mathbf{A}^*\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2Z_1 \\ -2Z_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -14 & 7 \\ 0 & -12 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-7) \\ :6 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +Z_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^*$$

$$r = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rg}(\mathbf{A}^*) = 2$$

Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems

Die Lösungen des vorliegenden homogenen $(3, 3)$-Systems hängen somit noch von *einem* Parameter ab, da $n - r = 3 - 2 = 1$ ist. Wir lösen das *gestaffelte* System

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}$$

und erhalten mit dem *Parameter* $x_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$ die folgende *unendliche* Lösungsmenge:

$$\left.\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0.25t \\ x_2 & = & 0.5t \\ x_3 & = & t \end{array}\right\} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems

Beispiel

Besitzt das *homogene* lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht-triviale Lösungen?

Um diese Frage zu beantworten, müssen wir den Wert der Determinanten der Koeffizientenmatrix

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

berechnen.

Lösbarkeit eines homogenen linearen (n, n)-Systems

Dies geschieht wie folgt. Zunächst addieren wir zur 4. Spalte die 1. Spalte hinzu und zur 2. Spalte das zweifache der 1. Spalte. Dabei ändert sich die Determinante nicht (siehe Rechenregeln für Determinanten, Kapitel 8.2). Anschliessend wird die Determinante nach der 1. Zeile *entwickelt*.
Wir erhalten dann:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 9 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-107) = -107$$

Wegen $\det \mathbf{A} = -107 \neq 0$ ist das vorgegebenene homogene System nur *trivial* lösbar.

$\Longrightarrow$ *Einzige* Lösung ist somit $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Cramersche Regel

Ein lineares (n, n)-Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ besitzt genau *eine* Lösung, wenn die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ *regulär* ist.
Dann existiert auch die zu $\mathbf{A}$ *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ und die Lösung des Systems lässt sich wie folgt berechnen:

$$\begin{array}{rrl} & \mathbf{Ax} & = \mathbf{c} \\ \Rightarrow & \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Ax} & = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \\ \Rightarrow & (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A})\mathbf{x} & = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \\ \Rightarrow & (\mathbf{E})\mathbf{x} & = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \\ \Rightarrow & \mathbf{x} & = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \end{array}$$

Wir berechnen nun das Produkt $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c}$, wobei wir die Darstellung aus Kapitel 8.3 für $\mathbf{A}^{-1}$ verwenden und erhalten:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{c} \quad = \quad \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Cramersche Regel

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} c_1 A_{11} & + & c_2 A_{21} & + & \cdots & + & c_n A_{n1} \\ c_1 A_{12} & + & c_2 A_{22} & + & \cdots & + & c_n A_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ c_1 A_{1n} & + & c_2 A_{2n} & + & \cdots & + & c_n A_{nn} \end{pmatrix}$$

oder in *komponentenweiser* Darstellung:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \cdots + c_n A_{n1}}{\det \mathbf{A}} \\ x_2 &= \frac{c_1 A_{12} + c_2 A_{22} + \cdots + c_n A_{n2}}{\det \mathbf{A}} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{c_1 A_{1n} + c_2 A_{2n} + \cdots + c_n A_{nn}}{\det \mathbf{A}} \end{aligned}$$

Cramersche Regel

Im *Nenner* dieser Formelausdrücke steht die Determinante der Koeffizientenmatrix $D = \det \mathbf{A}$.
Auch der jeweilige *Zähler* lasst sich durch eine *Determinante* darstellen.
Ersetzen wir in der Determinanten der Koeffizientenmatrix beispielweise die *1. Spalte* durch die Glieder $c_1, c_2, ..., c_n$ des Systems, so erhalten wir die n-reihige Determinante

$$D_1 \quad = \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Durch die *Entwicklung* von D_1 nach der *1. Spalte* folgt weiter:

$$D_1 = c_1 A_{11} + c_2 A_{21} + \cdots + c_n A_{n1}$$

Daher können wir schreiben

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad (D = \det \mathbf{A}).$$

Cramersche Regel

Entsprechend erhalten wir für die übrigen Unbekannten $x_2, x_3, .., x_n$

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

mit $D_1, D_2, ..., D_n$ der *Hilfsdeterminanten*.

Cramersche Regel

Ein lineares (n, n)-System $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ mit *regulärer* Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ besitzt die *eindeutig* bestimmte Lösung

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

Dabei bedeuten:

D : Determinante der Koeffizientenmatrix $(D = \det \mathbf{A} \neq 0)$

D_i : *Hilfsdeterminante*, die aus D hervorgeht, indem man die *i-te* Spalte durch die Glieder $c_1, c_2, ..., c_n$ ersetzt.

Cramersche Regel

Anmerkungen

- Man beachte: die *Cramersche Regel* darf *nur* angewendet werden, wenn die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ *regulär* ist, d.h. $D = \det \mathbf{A} \neq 0$.
- Um die Lösung eines (n, n)-Systems nach der *Cramerschen Regel* zu bestimmen, müssen insgesamt $n + 1$ Determinanten der Ordnung n berechnet werden, nämlich D, $D_1, \ldots, D_n$.

  Der Rechenaufwand ist dabei - insbesondere bei Determinanten höherer - Ordnung - erheblich.
  In der Praxis wird man daher die Lösung eines linearen (n, n)-System für $n > 3$ stets mit Hilfe des *Gauss'schen Algorithmus* bestimmen.

Cramersche Regel

Beispiel

Das *inhomogene* lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ -\quad x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & = & 1 \end{array}$$

besitzt genau *eine* Lösung, da die Determinante D der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 31 \neq 0$$

Die Lösung bestimmen wir nach der *Cramerschen Regel*. Dazu benögtigen wir noch die folgenden *Hilfsdeterminanten*:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 155 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -62 \\ D_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Das lineare Gleichungssystem besitzt demnach die folgende *Lösung*:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{155}{31} = 5, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-62}{31} = -2, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{31} = 0$$

Gauss-Jordan-Verfahren

Berechnung einer inversen Matrix mithilfe elementarer Zeilenumformungen (Gauss-Jordan-Verfahren)

Zu jeder *regulären* n-reihigen Matrix **A** gibt es genau eine *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, die schrittweise wie folgt berechnet werden kann:

- Zunächst wird aus der **Matrix A** und der n-reihigen Einheitsmatrix **E** die neue Matrix

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

  vom Typ $(n, 2n)$ gebildet.

Gauss-Jordan-Verfahren

Gauss-Jordan-Verfahren

- Diese Matrix wird nun mithilfe *elementarer Zeilenumformungen* so umgeformt, dass die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$ den ursprünglichen Platz der Matrix $\mathbf{A}$ einnimmt. Die gesuchte *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ befindet sich dann auf dem ursprünglichen Platz der Einheitsmatrix $\mathbf{E}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$$

mit $(b_{ij}) = \mathbf{A}^{-1}$.

Gauss-Jordan-Verfahren

Beispiel

Wir berechnen die zur *regulären* 3-reihigen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gehörige inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$, diesmal nach dem *Gauss-Jordan-Verfahren*. Die jeweils durchgeführten Operationen schreiben wir dabei *rechts* an die Matrix (Z: Zeile):

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +8Z_1 \\ +2Z_1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ := Z_3 \\ := Z_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -4Z_2 \end{array}$$

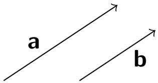
$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{r} +Z_3 \\ +2Z_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$$

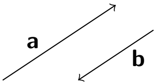
Die zu $\mathbf{A}$ *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ lautet somit:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Ein einführendes Beispiel



: parallele Vektoren



: anti-parallele Vektoren

Jeder der beiden Vektoren ist daher als ein bestimmtes *Vielfaches* des anderen Vektors in der Form

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{b} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{b} = c_2\mathbf{a}$$

darstellbar.

Im Falle *paralleler* Vektoren sind beide Koeffizienten c_1 und c_2 *positiv*, bei *anti-parallelen* Vektoren beide *negativ*.

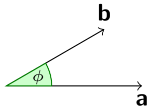
Ein einführendes Beispiel

Wir können den Zusammenhang zwischen den Vektoren **a** und **b** aber auch durch eine *lineare* Vektorgleichung vom Typ

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda_1, \lambda_2 \neq 0$$

ausdrücken.
Zwischen den beiden Vektoren besteht somit eine *lineare Beziehung* oder *lineare Abhängigkeit*. Sie werden daher folgerichtig als *linear abhängige* Vektoren bezeichnet.

Ein einführendes Beispiel

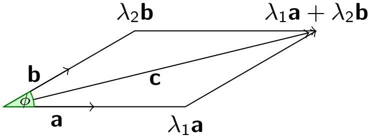


: Nicht-kollineare Vektoren

In diesem Fall kann *keiner* der beiden Vektoren als Vielfaches des anderen Vektors ausgedrückt werden.
Wir haben es hier mit sogenannten *linear unabhängigen* Vektoren zu tun. Eine lineare Vektorgleichung der Form

$$\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = 0$$

kann demnach bei *linear unabhängigen* Vektoren nur dann erfüllt sein, wenn $\lambda_1, \lambda_2 = 0$.



: Der Vektor **c** ist als Linearkombination der Vektoren **a** und **b** darstellbar

Offensichtlich lässt sich in diesem Fall ein *beliebiger* Vektor **c** der Ebene durch eine *Linearkombination* der Vektoren **a** und **b** wie folgt darstellen

$$\mathbf{c} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} \quad \text{für bestimmte } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Die drei Vektoren **a**, **b**, und **c** sind dabei *linear abhängig*, da in

$$\mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{b} - \mathbf{c}$$

nicht alle Koeffizienten gleichzeitig verschwinden.

Linear unabhängige bzw. abhängige Vektoren

Definition

Die n Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n$ aus dem m-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^m$ heissen *linear unabhängig*, wenn die lineare Vektorgleichung

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ erfüllt werden kann.
Kann jedoch die Gleichung erfüllt werden, *ohne dass gleichzeitig alle* Koeffizienten verschwinden, so heissen die Vektoren *linear abhängig*.

Anmerkung

- Im Falle der *linearen Abhängigkeit* muss es also *mindestens einen* von Null verschiedenen Koeffizienten in der Vektorgleichung geben können.

Linear unabhängige bzw. abhängige Vektoren

Beispiel

- Die beiden Basisvektoren $\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene sind *linear unabhängig*. Die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \mathbf{e}_x + \lambda_2 \mathbf{e}_y = \mathbf{0}$$

führt nämlich zum homogenen linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 &= 0 \\ \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Linear unabhängige bzw. abhängige Vektoren

Beispiel

- Auf einem Massenpunkt greifen gleichzeitig drei Kräfte $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, und $\mathbf{F}_3$ ein. Wir fassen diese Einzelkräfte in der üblichen Weise zu einer *resultierenden* Kraft

$$\mathbf{F}_\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

zusammen. Die vier Kraftvektoren bilden dann in ihrer Gesamtheit ein System aus *linear abängigen* Vektoren, da in der linearen Vektorgleichung

$$0 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 - \mathbf{F}_\mathbf{R}$$

sogar *alle vier* Koeffizienten von Null *verschieden* sind.

Linear abhängige Vektoren

Linear abhängige Vektoren

Angenommen ein System aus n Vektoren a_1, a_2,...,a_n besitzt *mindestens* eine der folgenden drei Eigenschaften:

1. Das Vektorsystem enthält den *Nullvektor*.
2. Das Vektorsystem enthält zwei *gleiche* oder zwei *kollineare* (d.h. parallele oder anti-parallele) Vektoren.
3. Mindestens einer der n Vektoren ist als Linearkombination der *übrigen* Vektoren darstellbar.

Die Vektoren a_1, a_2,...,a_n sind dann *linear abhängig*.

Linear abhängige Vektoren

Beispiel

- Die aus n Einzelkräften $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,...$\mathbf{F}_n$, die alle an einem Massenpunkt angreifen, gebildete *resultierende* Kraft

$$\mathbf{F}_\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n$$

ist eine spezielle *Linearkombination* dieser Kraftvektoren (nämlich die *Vektorsumme*).
Die $(n+1)$-Kräfte $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,...$\mathbf{F}_n$ und $\mathbf{F}_\mathbf{R}$ sind daher *linear abhängig*.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\mathbf{a}_1$,$\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_n$ des m-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^m$ können dabei wie folgt als *Spaltenvektoren* einer Matrix $\mathbf{A}$ vom Typ (m, n) aufgefass t werden:

$$\mathbf{A} \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{a}_n \end{array} \end{array}$$

Der Spaltenvektor $\mathbf{a}_k$ besitzt also der Reihe nach die Komponenten $a_{1k}, a_{2k}, ..., a_{mk}$ $(k = 1, 2, ..., n)$. Das Matrixelement a_{ik} ist demnach die $i - te$ Komponente des k-ten Spaltenvektors $\mathbf{a}_k$.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Mit diesen Bezeichnungen können wir die lineare Vektorgleichung

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

wie folgt auch als *Matrizengleichung* schreiben:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}\lambda = \mathbf{0}$$

Es handelt sich hierbei um ein *homogenes lineares Gleichungssystem* mit den n unbekannten Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, die wir noch zum Spaltenvektor λ zusammengefasst haben.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Wir wissen bereits, dass dieses System *stets* lösbar ist, wobei allerdings noch *zwei* Fälle zu unterscheiden sind.

- Fall $r = n$

  Es gibt *genau* eine Lösung, $\lambda = \mathbf{0}$.

  $$r = n \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$$

  Die n Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_n$ sind in diesem Fall *linear unabhängig*.

- Fall $r < n$

  Es gibt *unendlich* viele Lösungen für die unbekannten Koeffizienten, d.h. also auch Lösungen, bei denen *nicht alle* λ_i verschwinden:

  $$r < n \quad \Rightarrow \quad \text{nicht alle } \lambda_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

  Die n Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_n$ sind in diesem Fall *linear abhängig*.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Kriterium für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

n Vektoren $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_n$ des m-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^m$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn die aus ihnen gebildete Matrix $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n)$ den Rang $r = n$ besitzt.
Sie sind jedoch *linear abhängig*, wenn $r < n$ ist.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel

Die aus den drei Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gebildete Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ist *regulär*, da ihre Determinante *nicht verschwindet*:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Die Matrix besitzt damit den Rang $r = 3$.

Wegen $r = n = 3$ handelt es sich hier also *linear unabhängige* Vektoren.

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel

Drei Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ des $\mathbb{R}^4$ bilden die folgende $(4,3)$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Um festzustellen, ob sie *linear unabhängig* sind, bestimmen wir zunächst den Rang dieser Matrix mit Hilfe elementarer *Zeilenumformungen*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -Z_1 \\ -Z_1 \\ -Z_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -0.5Z_2 \\ \\ \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Die Matrix besitzt jetzt die gewünschte *Trapezform*, für ihren Rang gilt somit $\mathrm{Rg}(\mathbf{A}) = r = 2$.
Wegen $n = 3$ und somit $r < n = 3$ sind die Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, und $\mathbf{a}_3$ *linear abhängig*.
In der Tat besteht zwischen ihnen folgender Zusammenhang (wie man leicht nachrechnet):

$$\mathbf{a}_3 = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

oder umgeschrieben

$$3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$$

Kriterien für die lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Wir können aus dem Kriterium für linear unabhängige Vektoren noch weitere Schlüsse ziehen:

- Sonderfall $m = n$
  - $\mathbf{A}$ ist regulär, d.h. $\det \mathbf{A} \neq 0 \Rightarrow$ *linear unabhängige* Vektoren
  - $\mathbf{A}$ ist singulär, d.h. $\det \mathbf{A} = 0 \Rightarrow$ *linear abhängige* Vektoren
- Sonderfall $m < n$

  Die Anzahl n der Vektoren ist *grösser* als die Dimension m des Raumes, aus dem sie stammen. Für der Rang r der Matrix $\mathbf{A}$ gilt dann:

$$\left.\begin{array}{c} r \leq m \\ r \leq n \\ m < n \end{array}\right\} \Rightarrow r \leq m < n \Rightarrow r < n$$

  Der Rang r der Matrix $\mathbf{A}$ ist somit kleiner als die Anzahl n der Vektoren, diese sind daher *linear abhängig*.

Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

- n Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ des n-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ sind genau dann *linear unabhängig*, wenn die aus diesen Vektoren gebildete n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ *regulär* ist, d.h. $\det \mathbf{A} \neq 0$ gilt:

$$\mathbf{A} \textit{ regulär} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{linear unabhängige } \text{Vektoren}$$

- Unter den Vektoren des n-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ gibt es *maximal* n linear unabhängige Vektoren.
  Mehr als n Vektoren sind stets *linear abhängig*.

Anmerkung

- Der Rang r einer (m, n)-Matrix $\mathbf{A}$ mit m Zeilen und n Spalten lässt sich auch wie folgt deuten:
  r ist die *maximale Zahl* linear unabhängiger *Zeilen-* bzw. *Spaltenvektoren* der Matrix $\mathbf{A}$ ($r \leq m$, $r \leq n$).

Über die lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

- Ist jedoch die aus den n Vektoren $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_n$ des n-dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ gebildete n-reihige Matrix $\mathbf{A}$ *singulär*, d.h. gilt $\det \mathbf{A} = 0$, so sind die Vektoren *linear abhängig*:

  $$\mathbf{A} \textit{ singulär} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{linear abhängige } \text{Vektoren}$$

  Dies ist der Fall, wenn das Vektorsystem

  - den *Nullvektor* oder zwei *kollineare* (d.h. parallele oder anti-parallele) Vektoren enthält;
  - einer der Vektoren als *Linearkombination* der übrigen Vektoren darstellbar ist.

Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel

Die drei Basisvektoren $\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des dreidimensionalen Anschauungsraumes sind *linear unabhängig*, denn die aus ihnen gebildete 3-reihige Matrix

$$\mathbf{A} = (\mathbf{e}_x \ \mathbf{e}_y \ \mathbf{e}_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist wegen

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

regulär.

Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

Beispiel

Dagegen sind die drei in einer Ebene liegenden Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

linear abhängig.

Begründung: Im $\mathbb{R}^2$ gibt es maximal *zwei* linear unabhängige Vektoren, *mehr als zwei* Vektoren (hier: drei) sind also stets *linear abhängig*.

Anwendungsbeispiel: elektrisches Netzwerk

Das behandelte *elektrische Netzwerk* mit dem ohmschen Widerständen R_1, R_2, und R_3 und einer Spannungsquelle U führte uns zu dem *inhomogenen* linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} I_1 & - & I_2 & - & I_3 & = & 0 \\ R_1 I_1 & + & R_2 I_2 & & & = & U \\ & & R_2 I_2 & - & R_3 I_3 & = & 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das System besitzt wegen

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -(R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) \neq 0$$

eine *reguläre* Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ und ist somit *eindeutig* lösbar.

Anwendungsbeispiel: elektrisches Netzwerk

Die Teilströme I_1, I_2, und I_3 berechnen wir nach der *Cramerschen Regel* unter Verwendung der drei *Hilfsdeterminanten*

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ U & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & -R_3 \end{vmatrix} = -(R_2 + R_3)U \\
D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & U & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 \end{vmatrix} = -R_3 U \\
D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & U \\ 0 & R_2 & 0 \end{vmatrix} = -R_2 U
\end{aligned}
$$

und erhalten:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{D_1}{D} = \frac{(R_2 + R_3)U}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\
I_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{R_3 U}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \\
I_3 &= \frac{D_3}{D} = \frac{R_2 U}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}
\end{aligned}
$$