ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Mathematik II
Frühlingsemester 2019
Kap. 9: Funktionen mehrerer Variablen
9.2 Partielle Differentiation

Prof. Dr. Erich Walter Farkas

http://www.math.ethz.ch/~farkas

9. Funktionen mehrerer Variablen: 2. Partielle Differentiation

- Partielle Ableitungen 1.Ordnung
- Partielle Ableitungen höherer Ordnung
- Das totale oder vollständige Differential einer Funktion
- Geometrische Betrachtungen
- Differentiation nach einem Parameter (Kettenregel)
    - Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Literatur

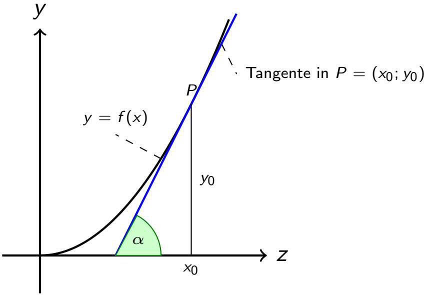
- Lothar Papula
- *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 2*
  Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium
  14. Auflage
  Springer Verlag
- **Seiten 213 – 232**,
  Seiten 332 – 338 (Übungsaufgaben mit Lösungen im Anhang)

Partielle Ableitungen 1.Ordnung

Wir erinnern zunächst an den Begriff der *Ableitung* bei einer Funktion *einer* Variablen: Definitionsgemäss wird der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

als 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 bezeichnet.
Aus *geometrischer* Sicht lässt sich diese Ableitung als *Steigung* m der im Punkt $P = (x_0; y_0)$ errichteten *Kurventangente* deuten: $m = tan(\alpha) = f'(x_0)$



Partielle Ableitungen 1.Ordnung

Analoge Überlegungen führen bei einer Funktion *zweier* Variablen, die sich geometrisch als Fläche im Raum darstellen lässt, zum Begriff *der partiellen Ableitung* einer Funktion.

Definition

Unter den *partiellen Ableitungen 1. Ordnung* einer Funktion $z = f(x; y)$ an der Stelle $(x; y)$ werden die folgenden Grenzwerte verstanden (falls sie vorhanden sind):

- *Partielle Ableitung 1. Ordnung nach x:*

$$f_x(x; y) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x; y) - f(x_0; y)}{x - x_0}$$

- *Partielle Ableitung 1. Ordnung nach y:*

$$f_y(x; y) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x; y) - f(x; y_0)}{y - y_0}$$

Partielle Ableitungen 1.Ordnung

Anmerkungen

- Weitere, allgemein übliche Symbole für *partielle Ableitungen* sind:
  $$\begin{array}{llll} f_x(x;y), & z_x(x;y), & \frac{\partial f}{\partial x}(x;y), & \frac{\partial z}{\partial x}(x;y) \\ f_y(x;y), & z_y(x;y), & \frac{\partial f}{\partial y}(x;y), & \frac{\partial z}{\partial y}(x;y) \end{array}$$
  oder (in *verkürzter* Schreib weise)
  $$\begin{array}{llll} f_x, & z_x, & \frac{\partial f}{\partial x}, & \frac{\partial z}{\partial x} \\ f_y, & z_y, & \frac{\partial f}{\partial y}, & \frac{\partial z}{\partial y} \end{array} .$$
- *Geometrische* Deutung der partiellen Ableitungen von $z = f(x;y)$ an der Stelle $(x_0;y_0)$:
  - $f_x(x_0;y_0)$: *Anstieg* der Flächentangente in x-Richtung im Flächenpunkt $P = (x_0;y_0;z_0)$.
  - $f_y(x_0;y_0)$: *Anstieg* der Flächentangente in y-Richtung im Flächenpunkt $P = (x_0;y_0;z_0)$.

Partielle Ableitungen 1.Ordnung

Beispiel

$$z = f(x;y) = -4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5$$

Wir bestimmen die *partielle Ableitungen 1. Ordnung* dieser Funktion und berechnen ihre Werte an der Stelle $x = 1$, $y = 2$:

$$\begin{aligned}
f_x(x;y) &= \frac{\partial}{\partial x}(-4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5) \\
&= -12x^2y^2 + 3y^4 - 3 \\
f_y(x;y) &= \frac{\partial}{\partial y}(-4x^3y^2 + 3xy^4 - 3x + 2y + 5) \\
&= -8x^3y + 12xy^3 + 2 \\
f_x(1;2) &= -3 \\
f_y(1;2) &= 82
\end{aligned}$$

Die im Flächenpunkt $P = (1; 2; 38)$ errichteten Tangenten besitzen somit den folgenden *Anstieg* bzw. *Steigungswinkel*:

- *Tangente in x-Richtung*:

$$m_x = \tan(\alpha) = -3 \Rightarrow \alpha = 180^\circ + arctan(-3) = 108,4^\circ$$

- *Tangente in y-Richtung*:

$$m_y = \tan(\beta) = 82 \Rightarrow \beta = arctan(82) = 89,3^\circ$$

Partielles Differenzieren (Funktion mehrerer Variablen)

Partielles Differenzieren bei einer Funktion mehrerer Variablen

Bei einer Funktion $y = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ von n unabhängigen Variablen $x_1, x_2, ..., x_n$ lassen sich insgesamt *n partielle Ableitungen 1. Ordnung* bilden. Man erhält sie nach dem folgenden Schema:

1. In der Funktionsgleichung werden zunächst alle unabhängigen Variablen bis auf die *Differentiationsvariable* (das ist die Variable, nach der differenziert werden soll) als *konstante* Grössen, d.h. als *Parameter* betrachtet.
2. Die gegebene Funktion erscheint nun als eine (gewöhnliche) Funktion von *einer* Variablen, nämlich der Differentiationsvariablen, und wird unter Verwendung der bekannten Ableitungsregeln nach dieser Variablen differenziert. Das Ergebnis dieser Differentiation ist die gesuchte *partielle Ableitung 1. Ordnung*.

Partielles Differenzieren (Funktion mehrerer Variablen)

Anmerkungen

- Die *partielle* Differentiation wird somit auf die *gewöhnliche* Differentiation, d.h auf die Differentiation einer Funktion von einer Variablen zurückgeführt!

  Die Ableitungsregeln sind daher die gleichen wie bei den Funktionen *einer* Variablen.

  So lautet beispielweise die *Produktregel* bei *zwei* unabhängigen Variablen, d.h für eine Funktion vom Typ

$$z = f(x;y) = u(x;y) \cdot v(x;y) = u \cdot v$$

  wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} \cdot v + u \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Partielles Differenzieren (Funktion mehrerer Variablen)

- Wir differenzieren die *Zustandsgleichung eines idealen Gases* $p = p(V;T) = \frac{RT}{V}$ *partiell nach* V *bzw.* T:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial V} &= \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{RT}{V}\right) = -\frac{RT}{V^2} \\ \frac{\partial p}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{RT}{V}\right) = \frac{R}{V} \end{aligned}$$

-

$$z = f(x;y) = \underbrace{xy^2}_{u} \cdot \underbrace{(\sin(x) + \sin(y))}_{v}$$

Wir bilden die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ mit Hilfe der *Produktregel* und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= u_x v + v_x u = y^2 \cdot (\sin(x) + \sin(y)) + xy^2 \cdot \cos(x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= u_y v + v_y u = 2xy \cdot (sin(x) + \sin(y)) + xy^2 \cdot \cos(y) \end{aligned}$$

Partielles Differenzieren (Funktion mehrerer Variablen)

Beispiel

- $$z = f(x; y) = \ln(x + y^2)$$

  Wir führen zunächst die *Hilfsvariable* $u = x + y^2$ ein, erhalten die *äussere* Funktion $z = ln(u)$ und wenden dann die *Kettenregel* an:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \\
&= \frac{1}{u} \cdot 1 = \frac{1}{x + y^2} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\
&= \frac{1}{u} \cdot 2y = \frac{2y}{x + y^2}
\end{aligned}$$

Partielles Differenzieren (Funktion mehrerer Variablen)

Beispiel

Wir bilden die *partiellen Ableitungen 1. Ordnung* der Funktion

$$u = f(x;y;z) = sin(x-y)\cdot cos(z+2y).$$

Es sind dies

$$u_x(x;y;z) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sin(x-y)\cdot\cos(z+2y)\right] = \cos(x-y)\cdot\cos(z+2y)$$

(unter Verwendung der *Kettenregel*)

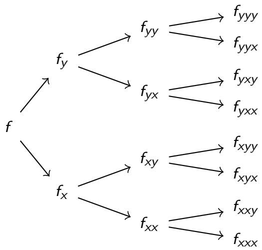
$$\begin{aligned} u_y(x;y;z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\sin(x-y)\cdot\cos(z+2y)\right] \\ &= -\cos(x-y)\cdot\cos(z+2y)+\sin(x-y)\cdot(-2\sin(z+2y)) \end{aligned}$$

$$u_z(x;y;z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\sin(x-y)\cdot\cos(z+2y)\right] = -\sin(x-y)\cdot\sin(z+2y)$$

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge bei einer gemischten partiellen Ableitung k-ter Ordnung (Satz von Schwarz)

Bei einer *gemischten* partiellen Ableitung k-ter Ordnung darf die Reihenfolge der einzelnen Differentiationsschritte *vertauscht* werden, wenn die partiellen Ableitungen k-ter Ordnung *stetige* Funktionen sind.



Auf *partielle Ableitungen höherer Ordnung* stösst man, wenn man eine Funktion von mehreren unabhängigen Variablen *mehrmals* nacheinander *partiell differenziert*.

So erhält man beispielsweise aus einer von *zwei* Variablen abhängigen Funktion $z = f(x; y)$ nach dem folgenden Schema der Reihe nach *zwei* partielle Ableitungen 1. Ordnung, *vier* partielle Ableitungen 2. Ordnung etc.

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Anmerkungen

- Für die gemischten partiellen Ableitungen 2. bzw 3. *Ordnung* einer Funktion $z = f(x; y)$ gilt somit unter den Voraussetzungen des *Satzes von Schwarz*:

$$\begin{aligned} f_{xy} &= f_{yx} \\ f_{xxy} &= f_{yxx} = f_{xyx} \\ f_{yyx} &= f_{yxy} = f_{xyy} \end{aligned}$$

- Die Anzahl der (verschiedenen) partiellen Ableitungen 2. bzw. 3. Ordnung *reduziert* sich damit von vier auf drei bzw. von acht auf vier Ableitungen:
  2. *Ordnung:* f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}
  3. *Ordnung:* f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}

Partielle Ableitungen höherer Ordnung

Beispiel

- Wir zeigen, dass die gemischten partiellen Ableitungen *2. Ordnung* der Funktion $f(x;y) = \ln(x^2+y)$ miteinander übereinstimmen:

$$
\begin{aligned}
f_x(x;y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\ln(x^2+y)\right] = \frac{2x}{x^2+y} \\
f_{xy}(x;y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2x}{x^2+y}\right] = -\frac{2x}{(x^2+y)^2} \\
f_y(x;y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\ln(x^2+y)\right] = \frac{1}{x^2+y} \\
f_{yx}(x;y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x^2+y}\right] = -\frac{2x}{(x^2+y)^2} \\
f_{xy} &= f_{yx}
\end{aligned}
$$

Geometrische Betrachtungen

Die Rolle, die die *Kurventangente* bei einer Funktion *einer* Variablen spielt, übernimmt bei einer Funktion $z = f(x; y)$ zweier Variablen die sogenannte *Tangentialebene*.

Gleichung der Tangentialebene

Die Gleichung der *Tangentialebene* an die Fläche $z = f(x; y)$ im Flächenpunkt $P = (x_0; y_0; z_0)$ mit $z_0 = f(x_0; y_0)$ lautet in symmetrischer Schreibweise wie folgt:

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) \tag{1}$$

Geometrische Betrachtungen

Beispiel

- Wir bestimmen die *Gleichung der Tangentialebene* an die Fäche $z = f(x; y) = x^2 + y^2$ im Flächenpunkt $P = (1; 1; 2)$:

$$f_x(x; y) = 2x \quad \Rightarrow \quad f_x(1; 1) = 2$$
$$f_y(x; y) = 2y \quad \Rightarrow \quad f_y(1; 1) = 2$$

Die Gleichung der gesuchten *Tangentialebene* lautet damit nach Gleichung (1):

$$z - 2 = 2(x - 1) + 2(y - 1) \quad \text{oder} \quad z = 2x + 2y - 2$$

Definition des totalen oder vollständigen Differentials

Definition

Unter dem *totalen* oder *vollständigen Differential* einer Funktion $z = f(x;y)$ zweier unabhängiger Variablen versteht man den *linearen Differentialausdruck*

$$dz = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Definition des totalen oder vollständigen Differentials

Das *totale Differential* besitzt somit die folgende *geometrische* Bedeutung:

Geometrische Deutung des totalen oder vollständigen Differentials

Bei einer Funktion $z = f(x;y)$ zweier unabhängiger Variablen beschreibt das *totale* oder vollständige *Differential*

$$dz = f_x dx + f_y dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

die *Änderung* der Höhenkoordinate bzw. des Funktionswertes z auf der im Berührungspunkt $P = (x_0; y_0; z_0)$ errichteten *Tangentialebene*.
Dabei sind die *Differentiale* dx, dy, dz die Koordinaten eines *beliebigen* Punktes auf der Tangentialebene, *bezogen auf den Punkt* P.

Definition des totalen oder vollständigen Differentials

Definition

Unter dem *totalen* oder *vollständigen Differential* einer Funktion $y = f(x_1; x_2; ...; x_n)$ von n unabhängigen Variablen versteht man den linearen Differentialausdruck

$$\begin{aligned} dy &= f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + ... + f_{x_n} dx_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \end{aligned}$$

Anmerkungen

- Das *totale Differential* einer Funktion beschreibt *näherungsweise*, wie sich der *Funktionswert* bei *geringfügigen* Veränderungen der unabhängigen Variablen um $dx_i = \Delta x_i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ ändert.

  Es gilt

  $\Delta y \simeq dy = f_{x_1} \Delta x_1 + f_{x_2} \Delta x_2 + ... + f_{x_n} \Delta x_n$.
- Eine *geometrische* Deutung des *totalen Differentials* ist bei Funktionen von *mehr als zwei* unabhängigen Variablen *nicht mehr* möglich.

Definition des totalen oder vollständigen Differentials

Beispiele

- Ein *ideales Gas* genügt der *Zustandsgleichung* $p(V;T) = \frac{RT}{V}$.
  Das *totale Differential* dieser Funktion lautet somit:

$$\begin{aligned} dp &= \frac{\partial p}{\partial V} dV + \frac{\partial p}{\partial T} dT \\ &= -\frac{RT}{V^2} dV + \frac{R}{V} dT \end{aligned}$$

-

$$z = f(x;y) = 4x^2 - 3xy^2 + x \cdot \exp(y)$$

Man berechne den Zuwachs der Höhenkoordinate z auf der zugehörigen Bildfläche bzw. auf der *Tangentialebene* an der Stelle $x = 1$, $y = 0$ für die Koordinatenänderungen $dx = \Delta x = -0,1$ und $dy = \Delta y = 0,2$.

Definition des totalen oder vollständigen Differentials

Lösung des Beispiels:

- **Zuwachs Δz auf der Bildfläche**

$$\begin{aligned} x = 1,\ y = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 1 - 0,1 = 0,9,\ y = 0 + 0,2 = 0,2 \\ \Delta z \quad &= \quad f(0,9;0,2) - f(1;0) = 4,23 - 5 = -0,77 \end{aligned}$$

- **Zuwachs dz auf der Tangentialebene**
  Für die Berechnung des *totalen Differentials dz* benötigen wir zunächst die *partiellen Ableitungen 1. Ordnung*. Sie lauten:

$$\begin{aligned} f_x(x;y) &= 8x - 3y^2 + \exp(y) \\ f_y(x;y) &= -6xy + x \cdot \exp(y) \end{aligned}$$

  An der Stelle $x = 1,\ y = 0$ gilt dann:

$$f_x(1;0) = 9,\ f_y(1;0) = 1$$

  Damit ist

$$dz = f_x(1;0)dx + f_y(1;0)dy = 9 \cdot (-0,1) + 1 \cdot (0,2) = -0,7$$

Definition des totalen oder vollständigen Differentials

- **Geometrische Interpretation**
  Der Stelle $x = 1$, $y = 0$ entspricht $z = f(1,0) = 5$ und damit der *Flächenpunkt* $P = (1; 0; 5)$.

  Die Koordinatenänderungen $dx = \Delta x = -0,1$ und $dy = \Delta y = 0,2$ beschreiben eine *Verschiebung des* Punktes P auf der *Fläche* bzw. auf der in P errichteten *Tangentialebene*.

  Dabei *verliert* der Punkt P in beiden Fällen an Höhe. Seine neue Lage ist Q bzw. $Q^{'}$:

$$P = (1; 0; 5) \quad \xrightarrow[\text{der Fläche}]{\text{Verschiebung auf}} \quad Q = (0,9; 0,2; 4,23)$$

$$P = (1; 0; 5) \quad \xrightarrow[\text{der Tangentialebene}]{\text{Verschiebung auf}} \quad Q^{'} = (0,9; 0,2; 4,3)$$

Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

$z = f(x; y)$ sei eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen x und y, diese wiederum von einem Parameter t abhängig:

$$x = x(t),\ y = y(t) \qquad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

Dann ist die durch Einsetzen dieser Parametergleichungen in die Funktionsgleichung $z = f(x; y)$ erhaltene Funktion

$$z = f(x(t); y(t)) = F(t) \qquad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

eine *zusammengesetzte, verkettete* oder *mittelbare* Funktion dieses Parameters, deren Ableitung nach der folgenden *Kettenregel* gebildet wird:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y} y'(t)$$

Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Bezeichnungen:

$z = f(x; y)$	:	*Äussere* Funktion
$x = x(t), y = y(t)$	:	*Innere* Funktionen

Anmerkungen

- Eine häufig verwendete Kurzschreibweise für die *Kettenregel* lautet:

$$\dot{z} = \dot{F} = z_x \dot{x} + z_y \dot{y}$$

- Die *Kettenregel* lässt sich sinngemäss auch auf Funktionen von *mehr als zwei unabhängigen Variablen* übertragen.
  Sie lautet zum Beispiel für eine Funktion $u = f(x, y, z)$ der drei unabhängigen Variablen x, y, und z, die jeweils noch von einem Parameter t abhängen ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$), wie folgt:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z} z'(t)$$

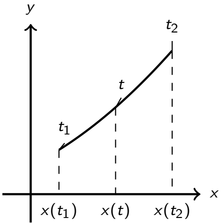
Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Anmerkungen

- Die Parametergleichungen $x = x(t)$, $y = y(t)$ definieren bekanntlich eine *Kurve* C in der x, y-Ebene.

  Die *verkettete* Funktion $z = F(t)$ beschreibt dann die Abhängigkeit der Höhenkoordinate z vom Kurvenparameter t, die Ableitung $\dot{z} = \dot{F}(t)$ die *Änderungsgeschwindigkeit* dieser Höhenkoordinate längs der Kurve (wiederum in Abhängigkeit von t).

  Man spricht daher in diesem Zusammenhang auch von der *Ableitung der Funktion* $z = f(x; y)$ *längs der Kurve* C.



Kettenregel für Funktionen mit einem Parameter

Beispiele

- $z = f(x; y) = x^2 y + y^3$ mit $x = x(t) = t^2$, $y = y(t) = e^t$
  Wir bilden zunächst die benötigten Ableitungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \; \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2, \; \frac{dx}{dt} = 2t, \; \frac{dy}{dt} = e^t$$

  Für die gesuchte Ableitung von z nach dem Parameter t folgt dann mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy \cdot 2t + (x^2 + 3y^2) \cdot e^t \\ &= 2t^2 \cdot e^t \cdot 2t + (t^4 + 3e^{2t}) \cdot e^t \\ &= (4t^3 + t^4 + 3e^{2t}) \cdot e^t \end{aligned}$$

  Wir hätten auch zuerst $x(t)$ und $y(t)$ direkt in $z = f(x; y)$ einsetzen und dann nach t ableiten können

$$z = f(x; y) = f(x(t); y(t)) = f(t^2; e^t) = t^4 e^t + e^{3t} = F(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dF}{dt} = 4t^3 e^t + t^4 e^t + 3e^{3t} = (4t^3 + t^4 + 3e^{2t}) \cdot e^t.$$