Wiederholung: Begriffe im diskreten Fall

Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine endliche oder abzählbare Menge und 2^Ω die Potenzmenge (Familie aller Teilmengen) von Ω. Teilmengen von Ω nennt man auch *Ereignisse*, und die speziellen Teilmengen $\{\omega\}$ mit $\omega \in \Omega$ *Elementarereignisse*. Ein (diskretes) *Wahrscheinlichkeitsmass* P auf Ω ist gegeben durch eine Funktion $p : \Omega \to [0,1]$ mit $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$. Für jede Teilmenge $A \subseteq \Omega$ ist dann $P[A] := \sum_{\omega\in A} p(\omega)$ die *Wahrscheinlichkeit* (kurz WS) des Ereignisses A. Damit ist P eine Funktion von 2^Ω nach $[0,1]$.

Ist Ω endlich, so benutzt man oft das *Laplace-Modell*, in dem alle Elementarereignisse $\{\omega\}$ die gleiche WS haben; dann ist $p(\omega) = 1/|\Omega|$ und $P[A] = |A|/|\Omega|$, wobei $|A|$ die Kardinalität (Anzahl der Elemente) von A bezeichnet. Die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten reduziert sich hier auf das Abzählen der Elemente von Teilmengen, und dazu ist oft Kombinatorik nützlich. Ob dieser Modellansatz sinnvoll ist, hängt vom betrachteten Problem ab.

Sind A, B Ereignisse, so ist die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B* definiert als

$$P[A|B] := \frac{P[A\cap B]}{P[B]}.$$

(Ist $P[B] = 0$, so ist auch $P[A\cap B] = 0$ und man muss eine Festlegung für den Quotienten $0/0$ treffen. Meist fordert man deshalb $P[B] > 0$.)

Ereignisse A und B heissen *unabhängig*, falls die Produktformel

$$P[A\cap B] = P[A]P[B]$$

gilt. Ist $P[B] > 0$, so ist das äquivalent zu $P[A|B] = P[A]$, d.h. die bedingte WS von A hängt nicht von der Bedingung B ab. Ebenso ist das äquivalent zu $P[B|A] = P[B]$, sofern $P[A] > 0$ ist.

Hat man mehrere Ereignisse, so nennt man sie unabhängig, falls alle endlichen Teilfamilien unabhängig sind; wir kommen darauf später zurück.

Ist A ein Ereignis, so nennen wir die Abbildung $I_A : \Omega \to \{0,1\}$ mit $I_A(\omega) = 1$ für $\omega \in A$ und $I_A(\omega) = 0$ für $\omega \notin A$ die *Indikatorfunktion* von A.

Eine (diskrete) *Zufallsvariable* (kurz ZV) ist eine Abbildung $X : \Omega \to I\!R$. Der Wertebereich $W(X)$ von X ist dann also eine endliche oder abzählbare Teilmenge von $I\!R$. (Allgemeiner kann man auch Abbildungen mit einem anderen Wertebereich U anstelle von $I\!R$ betrachten; dann spricht man von einer U-wertigen ZV. Dabei sollte U eine "vernünftige" Menge sein.)

Ist X eine ZV auf Ω und P ein Wahrscheinlichkeitsmass auf Ω, so ist die *Verteilung von X* ein Wahrscheinlichkeitsmass auf dem Wertebereich $W(X) \subseteq I\!R$ von X. Wir bezeichnen sie mit μ_X und haben

$$\mu_X(B) := P[X \in B] := P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}] \qquad \text{für alle Mengen } B \subseteq W(X).$$

Die *Gewichtsfunktion* (wir nennen sie nicht Dichtefunktion, siehe später) von X ist die Abbildung $p_X : W(X) \to [0,1]$, die durch

$$p_X(x) := P[X = x] := P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}]$$

gegeben ist. Die *Verteilungsfunktion* (kurz VF) von X ist die Abbildung

$$F_X : I\!R \to [0,1], \quad t \mapsto F_X(t) := P[X \le t].$$

Also gilt $F_X(t) = \sum_{x \le t} P[X = x] = \sum_{x \le t} p_X(x)$.

Ist X eine ZV auf Ω und P ein Wahrscheinlichkeitsmass auf Ω, so ist der *Erwartungswert* von X definiert als

$$E[X] := \sum_{x \in W(X)} x p_X(x) = \sum_{x \in W(X)} x P[X = x] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P[\{\omega\}].$$

Ist $X = I_A$ die Indikatorfunktion eines Ereignisses A, so liefert das $E[I_A] = P[A]$.

Wichtige diskrete Verteilungen

Ist A ein Ereignis und $p := P[A]$, so hat $X := I_A$ eine *Bernoulli-Verteilung* mit (Erfolgs-) Parameter p, d.h. $W(X) = \{0,1\}$ und $p_X(0) = 1 - p$, $p_X(1) = p$. Wir schreiben $X \sim \mathrm{Be}(p)$.

Seien $A_1, \ldots, A_n$ unabhängige Ereignisse mit $P[A_i] = p$ für alle i. Setzen wir $Y_i := I_{A_i}$ und interpretieren wir das Eintreten eines Ereignisses als Erfolg. Dann ist $X := \sum_{i=1}^n Y_i$ die *Anzahl der Erfolge* bei den Ereignissen $A_1, \ldots, A_n$. Die ZV X hat eine *Binomialverteilung* mit Parametern n und p, d.h. $W(X) = \{0, 1, \ldots, n\}$ und $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$. Wir schreiben $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Eine ZV X hat eine *geometrische Verteilung* mit (Erfolgs-) Parameter $p \in (0, 1)$, falls $W(X) = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ und $p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$. Hat man eine Folge $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von unabhängigen Ereignissen mit $P[A_i] = p$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so ist X die *Wartezeit auf den ersten Erfolg* (das Eintreten des ersten Ereignisses), d.h.

$$X = \inf\{k \in \mathbb{N} : I_{A_k} = 1 \text{ und } I_{A_i} = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k-1\}.$$

Wir schreiben $X \sim \mathrm{Geom}(p)$.

Eine Zufallsvariable X hat eine *Poissonverteilung* mit Parameter $\lambda \in (0, \infty)$, falls $W(X) = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ und $p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Man erhält diese Verteilung als Grenzwert der Binomialverteilung für $n \to \infty$ und $p_n \to 0$ mit $np_n \to \lambda$. Die Poissonverteilung ist also ein Modell für die Anzahl der Erfolge bei seltenen (unabhängigen) Ereignissen. Wir schreiben $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$.