Allgemeine Wahrscheinlichkeitsräume, Zufallsvariablen usw.

Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* (kurz WR) ist ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dabei ist $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge (die Menge aller *Elementarereignisse* $\omega \in \Omega$), $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra (die Familie aller beobachtbaren *Ereignisse*) und P ein Wahrscheinlichkeitsmass auf $\mathcal{F}$.

Eine *σ-Algebra* auf einer Menge $\Omega \neq \emptyset$ ist ein Mengensystem, also eine Teilmenge der Potenzmenge 2^Ω von Ω, mit folgenden Eigenschaften:

1) Ω ist in $\mathcal{F}$.

2) Ist $A \in \mathcal{F}$, so ist auch das Komplement A^c in $\mathcal{F}$.

3) Ist $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{F}$, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ in $\mathcal{F}$.

Ein *Wahrscheinlichkeitsmass* auf einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ ist eine Abbildung $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ mit folgenden Eigenschaften:

1) $P[\Omega] = 1$.

2) Ist $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{F}$, die paarweise disjunkt sind, d.h. $A_i \cap A_k = \emptyset$ für $i \neq k$, so gilt

$$P\left[\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right] = \sum_{i=1}^\infty P[A_i].$$

Mit der Notation $\dot\cup$ für eine Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen können wir 2) auch kompakter schreiben als

$$P\left[\dot{\bigcup_{i=1}^\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^\infty P[A_i].$$

Bemerkung. Ist Ω endlich oder abzählbar, so kann man als σ-Algebra meistens $\mathcal{F} = 2^\Omega$ nehmen. Ist Ω überabzählbar, so geht das in der Regel nicht und man muss ein echtes Teilsystem der Potenzmenge als σ-Algebra nehmen.

Eine beliebige Kollektion von Ereignissen $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ heisst *unabhängig*, falls für jede endliche Teilfamilie $A_1, \dots, A_n$ die Produktformel gilt, d.h.

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right] = \prod_{i=1}^{n} P[A_i].$$

Ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf $\Omega \neq \emptyset$, so ist eine *Zufallsvariable* (kurz ZV) eine Abbildung $X : \Omega \to I\!R$, die (bezüglich $\mathcal{F}$) messbar ist, d.h. die Menge $\{X \leq t\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}$ ist in $\mathcal{F}$ für all $t \in I\!R$.

Wie im diskreten Fall kann man statt reellwertige Zufallsvariablen auch Zufallsvariablen mit Werten in einer (vernünftigen) Menge U betrachten. Die Definition der Messbarkeit wird dann analog angepasst.

Ist X eine ZV auf Ω und P ein Wahrscheinlichkeitsmass auf Ω, so ist die *Verteilung von* X ein Wahrscheinlichkeitsmass auf dem Wertebereich $W(X) \subseteq I\!R$ von X. Wir bezeichnen sie mit μ_X und haben

$$\mu_X(B) := P[X \in B] := P[\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}] \qquad \text{für alle Borel-Mengen } B \subseteq I\!R.$$

Das ist analog zum diskreten Fall. Eine Gewichtsfunktion von X ist in der Regel nicht nützlich, weil meistens für feste $x \in W(X)$ gilt $P[X = x] = 0$. Die *Verteilungsfunktion* (kurz VF) von X ist wie im diskreten Fall die Abbildung

$$F_X : I\!R \to [0,1], \quad t \mapsto F_X(t) := P[X \leq t].$$

Sei X eine ZV mit VF F_X. Falls wir F_X schreiben können als $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(s)\,ds$ für alle $t \in I\!R$ mit einer Funktion $f_X : I\!R \to [0,\infty)$, so nennen wir F_X *absolutstetig* mit *Dichte* oder *Dichtefunktion* f_X. In diesem Fall nennen wir f_X auch die Dichte von X.

Ist X eine ZV auf einem WR $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, die eine Dichtefunktion f_X hat, so ist der *Erwartungswert* von X gegeben als

$$E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx,$$

sofern $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,dx$.