Bedingte Verteilungen usw.

Seien $X_1, \dots, X_n$ (reellwertige) Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (diskret oder allgemein). Die *gemeinsame Verteilung* von $X_1, \dots, X_n$ ist dann gegeben durch die *gemeinsame Verteilungsfunktion*

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) := P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] \qquad \text{für } x_1, \dots, x_n \in I\!R.$$

Falls alle Zufallsvariablen diskret sind, so ist ihre *gemeinsame Gewichtsfunktion*

$$p_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) := P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n].$$

Falls die Zufallsvariablen eine *gemeinsame Dichtefunktion* $f_{X_1,\dots,X_n}$ haben, so gilt

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,\dots,X_n}(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \cdots dt_n.$$

Ist $g : I\!R^n \to I\!R$ eine (Borel-)messbare Funktion, so ist $G := g(X_1, \dots, X_n)$ wieder eine reellwertige Zufallsvariable. In der Regel ist es kompliziert, die Verteilungsfunktion (oder Gewichtsfunktion oder Dichtefunktion) von G explizit zu finden. Man kann den Erwartungswert von G aber auch berechnen als

(1) $E[G]$

$$= E[g(X_1, \dots, X_n)]$$

$$= \begin{cases} \sum_{x_n \in I\!R} \cdots \sum_{x_1 \in I\!R} g(x_1, \dots, x_n) p_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) & \text{im diskreten Fall,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n & \text{im Fall einer Dichte.} \end{cases}$$

Voraussetzung ist jeweils, dass die Summe bzw. das Integral absolut konvergiert.

Seien X_1, X_2 diskrete Zufallsvariablen. Die *bedingte Verteilung von X_1 gegeben X_2* ist dann eine von X_2 abhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $W(X_1)$, und ihre Gewichtsfunktion ist (genauer: für alle $x_2 \in W(X_2)$ mit $p_{X_2}(x_2) > 0$) gegeben durch

$$p_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = P[X_1 = x_1 | X_2 = x_2] = \frac{P[X_1 = x_1, X_2 = x_2]}{P[X_2 = x_2]} = \frac{p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{p_{X_2}(x_2)}.$$

Der *bedingte Erwartungswert von X_1 gegeben X_2* ist dann auch eine Funktion von X_2 und gegeben durch

$$E[X_1|X_2](x_2) = \sum_{x_1 \in I\!R} x_1 p_{X_1|X_2}(x_1|x_2),$$

sofern die Summe absolut konvergiert. Es gilt dann mit Hilfe von (1)

$$E\big[E[X_1|X_2]\big] = \sum_{x_2 \in I\!R} E[X_1|X_2](x_2) p_{X_2}(x_2) = \sum_{x_2 \in I\!R} \sum_{x_1 \in I\!R} x_1 p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = E[X_1].$$

Analoge Resultate zum diskreten Fall hat man auch im Fall einer Dichte. Sind X_1, X_2 Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichte f_{X_1,X_2}, so ist die *bedingte Dichte von X_1 gegeben X_2* (genauer: für alle $x_2 \in I\!R$ mit $f_{X_2}(x_2) > 0$) gerade

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)},$$

der *bedingte Erwartungswert von X_1 gegeben X_2* ist

$$E[X_1|X_2](x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1|X_2}(x_1|x_2)\, dx_1,$$

sofern das Integral absolut konvergiert, und es gilt wieder

$$\begin{aligned} E\big[E[X_1|X_2]\big] &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X_1|X_2](x_2) f_{X_2}(x_2)\, dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = E[X_1]. \end{aligned}$$