Musterlösung Serie 1

1) Die augmentierte Matrix zum Gleichungssystem ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Durch Zeilenumformungen bringen wir die Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-2\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}+4\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & -8 \end{array}\right).$$

Die augmentierte Matrix hat 4 Pivotelemente. Die Lösung liest man von von unten nach oben ab:

- Zeile IV bedeutet $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 = -8$, das ist nur für $x_4 = -4$ erfüllt.
- Zeile III bedeutet $0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 = -2$, Einsetzen von $x_4 = -4$ ergibt dann $x_3 - 4 = -2$, also $x_3 = 2$.
- Zeile II bedeutet $0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 0$, Einsetzen von $x_4 = -4$ und $x_3 = 2$ ergibt $x_2 + 2 - 4 = 0$, also $x_2 = 2$.
- Zeile I bedeutet $1x_1 - 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 1$, Einsetzen von $x_4 = -4$, $x_3 = 2$ und $x_2 = 2$ ergibt $x_1 - 2 + 2 - 4 = 1$, also $x_1 = 5$.

Damit ist der Lösungsvektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2) Wir übersetzen eine Bedingung der Form $\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = y$ (in der a, b, c, d die Unbekannten, und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Koeffizienten sind) in eine Zeile

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta \mid y)$$

für das lineare Gleichungssystem:

Einsetzen von $x = 0$ in das Polynom ergibt $p(0) = a \cdot 0 + b \cdot +c \cdot 0 + d = d$, dieser Wert soll $= 2$ sein, also erhalten wir die Zeile $(0\,0\,0\,1 \mid 2)$. Einsetzen von $x = 1$ in das Polynom ergibt $p(1) = a + b + c + d$, dieser Wert soll $= 4$ sein, also erhalten wir die Zeile $(1\,1\,1\,1 \mid 4)$. Die erste Ableitung des Polynoms ist $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, wenn wir hier $x = 1$ einsetzen erhalten wir $p'(1) = 3a + 2b + c + 0 \cdot d$, dies soll $= 2$ sein, also als Zeile $(3\,2\,1\,0 \mid 2)$. Die zweite Ableitung ist $p''(x) = 6ax + 2b$, hier $x = 1$ eingesetzt ergibt $6a + 2b + 0 + 0$, dies soll $= 2$ sein, also als Zeile $(6\,2\,0\,0\,|\,2)$. Die vier Zeilen zusammengesetzt ergibt die augmentierte Matrix

$$(A, y) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Der Lösungsvektor

$$z \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

des linearen Gleichungssystems $Az = y$ enthält dann die Koeffizienten des gesuchten Polynoms. Zeilenumformungen ergeben

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-3\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -10 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}-6\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & -4 & -6 & -6 & -22 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-4\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|r} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Zeilentausch}} \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}: (-1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|r} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 6 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right).$$

Wir haben also wieder 4 Pivotelemente. Der letzte Umformungsschritt war für die Zeilenstufenform nicht unbedingt notwendig, es vereinfacht aber das Ablesen der Lösung wenn die Pivots normiert sind. Wir lesen die Lösung (a, b, c, d) ab:

- Zeile IV: Hier ist $d = 2$.
- Zeile III: Aus $2c + 6d = 18$ und $d = 2$ folgt $c = 3$.
- Zeile II: Aus $b + 2c + 3d = 10$ und $d = 2$ sowie $c = 3$ folgt $b = -2$.
- Zeile I: Aus $a + b + c + d = 4$ und $d = 2$, $c = 3$ sowie $b = -2$ folgt $a = 1$.

Wir haben also den Lösungsvektor

$$z \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

und das gesuchte Polynom ist

$$p(x) \;=\; x^3 - 2x^2 + 3x + 2\,.$$

Es ist das einzige Polynom dritten Grades, dass die vier Bedingungen aus der Aufgabe erfüllt.

3) Umformen der augmentierten Matrix ergibt

$$(A, b) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}-2\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & -1 & 1 & \alpha - 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \alpha \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}+\text{II}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha-3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathrm{IV}-2\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha-3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6-\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Zeilentausch}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \alpha-3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 6-\alpha \end{array}\right)$$

Die Matrix hat jetzt Zeilenstufenform, und wir können die Lösung ablesen:

- Aus Zeile IV folgt $x_4 = \alpha - 6$.
- Zeile III ist $x_3 + x_4 = \alpha - 3$, mit x_4 eingesetzt also $x_3 + \alpha - 6 = \alpha - 3$, woraus $x_3 = 3$ folgt.
- Zeile II ist $x_2 + 2x_3 = 1$, eingesetzt also $x_2 + 6 = 1$, woraus $x_2 = -5$ folgt.
- Zeile I ist $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, eingesetzt also $x_1 - 5 + 3 = 2$, also $x_1 = 4$.

Der Lösungsvektor ist also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \\ \alpha - 6 \end{pmatrix}.$$

Multiple Choice Aufgaben

1. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & z & = & 5, \\ 2x & & & + & z & = & 3, \\ 6x & + & y & - & 2z & = & 3. \end{array}$$

Führt man den ersten Schritt des Gaussalgorithmus mit dem Pivot der ersten Zeile aus, so ergibt sich die augmentierte Matrix

(a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -3/4 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 5 & 0 & -7 \end{array}\right)$

(b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 \end{array}\right)$

√ (c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 5 & -4 & -7 \end{array}\right)$

2. Die augmentierte Matrix eines linearen Gleichungssystems laute

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & c & -1 & 0 \\ 3 & d & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Wenn man im Gaussalgorithmus den Eintrag 1 oben links als erstes Pivot wählt, dann muss man im zweiten Eliminationsschritt Gleichungen vertauschen falls

(a) $c = -8$

Nein, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

also ist $c - 8 = -8 - 8 = -16 \neq 0$, wir finden also ein Pivot in der zweiten Zeile.

√ (b) $c = 8$

Richtig, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

also ist $c - 8 = 8 - 8 = 0$, wir finden also kein Pivot in der zweiten Zeile.

(c) $c = 2$

Nein, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

also ist $c - 8 = 2 - 8 = -6 \neq 0$, wir finden also ein Pivot in der zweiten Zeile.

3. Wenn man im Gaussalgorithmus den Eintrag 1 oben links als erstes Pivot wählt, dann findet man im zweiten Eliminationsschritt ein Pivot ausser wenn

√ (a) $c = 8,\ d = -6$

Richtig, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

und es ist $c - 8 = 8 - 8 = 0$ und $d + 6 = -6 + 6 = 0$, also finden wir kein zweites Pivot.

(b) $c = -8,\ d = 6$

Nein, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Es ist $c - 8 = -8 - 8 = -16 \neq 0$, also steht in der zweiten Zeile ein Pivot.

(c) $c = 8,\ d = 8$

Nein, denn nach dem ersten Schritt lautet die Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & c-8 & 3 & 0 \\ 0 & d+6 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Es ist $d + 6 = 8 + 6 = 14 \neq 0$, also steht in der dritten Zeile ein Pivot.