Lösung 11

1) Der Mittelwert verhält sich linear: $\bar{y} = \overline{aX + b} = a \cdot \bar{x} + b$. Dagegen verhält sich die Varianz quadratisch, sie ignoriert aber die Verschiebung um b: $s_Y^2 = s(aX+b)^2 = a^2 s_X^2$. Also haben wir die beiden Gleichungen

$$a \cdot \bar{x} + b \;=\; a \cdot 1 + b \;=\; 2 \;\;,\;\; a^2 s_X^2 \;=\; a^2 \cdot 4 \;=\; 1\,.$$

zweiten Gleichung folgt $a = \frac{1}{2}$ oder $a = -\frac{1}{2}$. Aus der ersten Gleichung dann $b = 2 - \frac{1}{2}$ oder $b = 2 + \frac{1}{2}$. Man hat also die beiden Möglichkeiten $(a,b) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ und $(a,b) = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$. Eine Streckung um einen negativen Wert ist durchaus zulässig.

2) Zu a): Für eine Dichtefunktion muss gelten, dass das Integral über die Funktion Eins ist. Wir berechnen das Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \;=\; \int_{-a}^{0} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x)dx + \int_{0}^{a} (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x)dx \;=\; \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2\right]_{-a}^{0} + \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2\right]_{0}^{a}$$

$$=\; 0 - \frac{1}{2}(-a) - \frac{1}{8}a^2 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 \;=\; -\frac{1}{4}a^2 + a\,.$$

Dieser Wert ist Eins für $a = 2$, also ist die gesuchte Dichtefunktion

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad\quad\;\; x \;\leq\; -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x & \text{falls} \;\; -2 \;\leq\; x \;\leq\; 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x & \text{falls} \;\;\;\; 0 \;\leq\; x \;\leq\; 2 \\ 0 & \text{falls} \;\;\;\; 2 \;\leq\; x \end{cases}\,.$$

Zu b): Wenn man die Dichtefunktion $f(x)$ kennt, kann man die kumulative Verteilungsfunktion berechnen über

$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,.$$

Bei der Berechnung von $F(x)$ muss man das Integral gemäss der Fallunterscheidungen aufteilen: Ist $x \leq -2$, so ist $f(x) = 0$ für $t = -\infty \ldots -2$, also ist auch das entsprechende Integral Null. Für $-2 \leq x \leq 0$ ist

$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \;=\; \int_{-2}^{x} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}t)dt \;=\; \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{8}t^2\right]_{-2}^{x} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2\,.$$

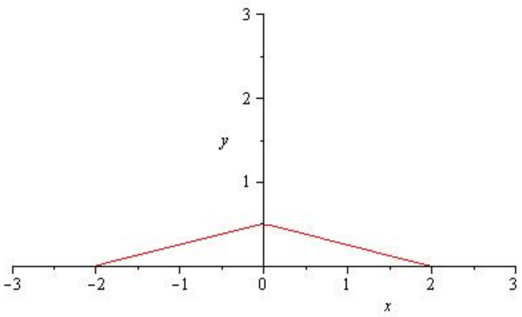
Am Endpunkt $x = 0$ des Teilintervalls gilt $F(0) = \frac{1}{2}$. Für den Bereich $0 \leq x \leq 2$ gilt dann

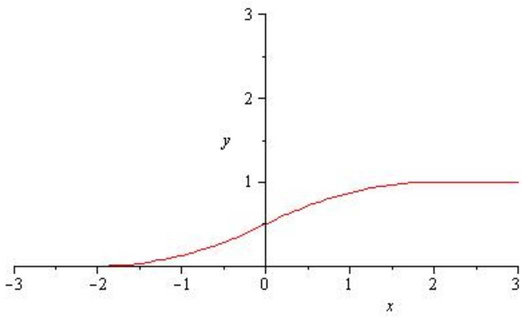
$$F(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \;=\; \int_{-2}^{0} (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}t)dt + \int_{0}^{x} (\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t)dt \;=\; F(0) + \int_{0}^{x} (\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t)dt \;=\; \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2\right]_{0}^{x} \;=\; \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2.$$

Am Endpunkt $x = 2$ des Teilintervalls gilt $F(2) = 1$, damit ist schon die ganze Wahrscheinlichkeitsmasse ausgeschöpft, also $F(x) = 1$ für alle $x \geq 2$. Damit gilt insgesamt

$$F(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad\quad\;\; x \;\leq\; -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 & \text{falls} \;\; -2 \;\leq\; x \;\leq\; 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 & \text{falls} \;\;\;\; 0 \;\leq\; x \;\leq\; 2 \\ 1 & \text{falls} \;\;\;\; 2 \;\leq\; x \end{cases}\,.$$

Zu c): Die Plots von $f(x)$ und $F(x)$ sind





Man erkennt die typischen Eigenschaften: F ist monoton wachsend mit $F(x) \to 1$ für $x \to \infty$, während f an beiden Rändern abfallen muss damit die Gesamtwahrscheinlichkeit bei Eins bleibt.

3) Zu a): Hier ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\sigma = \sigma^2 = 1$ und $\mu = 2$, und gefragt ist nach $P(X \leq 1) = F(1)$ für die kumulative Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen X. Der entsprechende Mathematica-Code lautet

`X = NormalDistribution[2,1]` $\Rightarrow$ `CFT[X][1.0]` $\Rightarrow$ `0.158655`

Zu b): Hier ist $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\sigma = \sigma^2 = 1$ und $\mu = 7$, und gefragt ist nach $P(X \leq 0) + P(X \geq 14)$ für die kumulative Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen X. Der entsprechende Mathematica-Code lautet

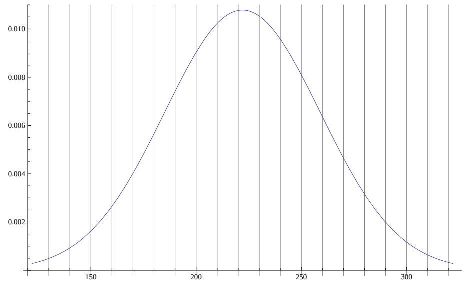
`X = NormalDistribution[7,1]` $\Rightarrow$ `CFT[X][0.0]+(1-CFT[X][14.0])` $\Rightarrow$ `2.55967`$\times 10^{-12}$

4) MC

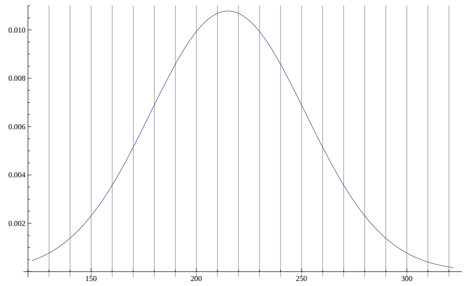
1. Der Cholesterinspiegel bei Männern mittleren Alters ist ungefähr normalverteilt mit Erwartungswert 222 mg/dl und Standardabweichung 37 mg/dl.

Welche Dichte stellt den Cholesterinsppiegel in diesem Teil der Bevölkerung dar?

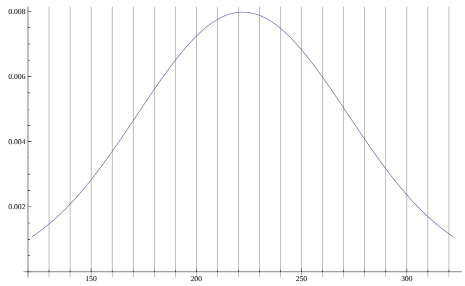
√ (a)



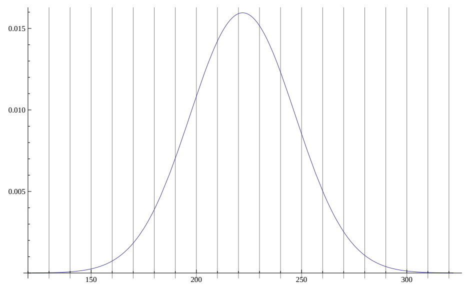
(b)



(c)



(d)



Im zweiten Graph liegt das Maximum unterhalb des Erwartungswerts. Im dritten und vierten Graph ist die Standardabweichung zu gross bzw. zu klein, dies erkennt man an der Lage der Wendepunkte.