Lösungen 2

1) Zu a): Umformen der augmentierten Matrix ergibt

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 9 & 5 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-2\text{I}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 9 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}+\text{I}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 12 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 9 & 5 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}-\text{V}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 9 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{V}-2\text{II}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{V}-3\text{III}} \left(\begin{array}{cccccc|c} \boxed{1} & 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Der Rang von A ist der Rang von (A, b), nämlich 4, also ist das Gleichungssystem lösbar.

Teil b): Die zu x_1, x_2, x_4, x_5 gehörenden Spalten haben ein Pivotelement, also sind diese Variablen festgelegt. Die Spalten zu x_3 und x_6 haben kein Pivot, diese Variablen sind also frei. Wir setzen $x_3 = s \in \mathbb{R}$ und $x_6 = t \in \mathbb{R}$ ein, und erhalten durch Ablesen:

- Zeile V ist eine Nullzeile, sie gibt keine Aussage für die Lösungsmenge.
- Zeile IV: Die Zeile bedeutet $3x_5 + x_6 = 2$, also $x_5 = \frac{2-t}{3}$.
- Zeile III: Die Zeile bedeutet $2x_4 + 2x_5 = 1$, also $x_4 = \frac{1-2x_5}{2} = \frac{1-2\frac{2-t}{3}}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{t}{3}$.
- Zeile II: Die Zeile bedeutet $x_2 + 2x_3 + x_6 = 0$, also $x_2 = -2s - t$. Die freien Variablen s und t können nicht weiter ersetzt werden.
- Zeile I: Die Zeile bedeutet $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_6 = 3$, also $x_1 = 3 - 2x_2 - 4s - x_4 - 2t = 3 + 4s + 2t - 4s + \frac{1}{6} - \frac{t}{3} - 2t = \frac{19}{6} - \frac{1}{3}t$.

Damit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$L(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{19}{6} - \frac{1}{3}t \\ -2s - t \\ s \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}t \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Teil c): Eingabe:

```
G1 := 1*x1 + 2*x2 + 4*x3 + 1*x4 + 0*x5 + 2*x6 == 3
G2 := 0*x1 + 1*x2 + 2*x3 + 0*x4 + 0*x5 + 1*x6 == 0
G3 := 2*x1 + 4*x2 + 8*x3 + 4*x4 + 2*x5 + 4*x6 == 7
G4 := -x1  + 0*x2 + 0*x3 - 1*x4 + 12*x5 + 4*x6 == 5
G5 := 0*x1 + 2*x2 + 4*x3 + 0*x4 + 9*x5 + 5*x6 == 6
Reduce[{G1, G2, G3, G4, G5}]
```

Ausgabe:

```
x5 == 2/3 - x6/3 && x4 == -(1/6) + x6/3 && x2 == -2 x3 - x6 &&
 x1 == 19/6 - x6/3
```

2) Zu a): Umformen der Matrix gibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a & a \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & a+2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{V}-2\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a & a \\ a & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-a\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 2-2a & 1 & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-(2-2a)\text{II}]{\text{III}-a\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -3+4a & -1+2a-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad (*).$$

Hier ist die erste Fallunterscheidung notwendig: das $-a$ in der dritten Zeile ist entweder ein Pivot (falls $a \neq 0$ ist), oder nicht.

<u>Fall 1: $a = 0$</u>
Wir nehmen $a = 0$ an, also löschen wir a überall in der Matrix, und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Tausch}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier stehen 3 Pivotelemente, also hat in diesem Fall A den Rang 3.

<u>Fall 2: $a \neq 0$</u>
Wir müssen zurück zur Stelle $(*)$ vor der letzten Fallunterscheidung gehen, und mit der Annahme $a \neq 0$ weiter umformen. Dank der Annahme können wir jetzt Zeile III durch $-a$ und Zeile V durch a dividieren, und erhalten

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3+4a & -1+2a-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV eliminieren}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Tausch}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hier stehen 4 Pivotelemente, also ist in diesem Fall der Rang 4.

Die richtige Antwort zur Aufgabe ist also

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{cases} 3 & \text{falls} \quad a = 0 \\ 4 & \text{falls} \quad a \neq 0 \end{cases}.$$

Mathematica erkennt hier keine Fallunterscheidungen. Leider teilt Mathematica das nicht mit, und tut einfach so als gäbe es nur diesen einen Fall. Der Befehl `Reduce` erkennt dagegen Fallunterscheidungen.

3) Umformen ergibt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 3\lambda^2-2 & 2+3\lambda^2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III}-\text{I}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 3\lambda^2-2 & 2+3\lambda^2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{IV}-3\lambda\text{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV}+2\text{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda-2 & 2 \end{array}\right).$$

Diese Umformungen sind für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ richtig, da nirgends dividiert wurde. Die Zeilenstufenform hängt jetzt von λ wie folgt ab:

- $\lambda = 1$: Dann lautet die letzte Zeile $(0\,0\,0\,0 \mid 2)$, und das System ist unlösbar.

- $\lambda = 0$: Dann müssen wir weiter umformen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Tausch}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  Diese Zeilestufenform ist lösbar. Die Spalte 3 hat kein Pivot, also gibt es einen freien Parameter und damit unendlich viele Lösungen.

- $\lambda \neq 0, 1$: In diesem Fall ist

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 2 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda-2 & 2 \end{array}\right)$$

  schon in Zeilenstufenform, die Diagonalelemente sind alle nicht Null und damit Pivots. Jede Spalte hat ein Pivot und es gibt keine Nullzeilen, also hat dieses System genau eine Lösung.

4) (a) Sei $u = v = w = 2$ und $a = 0$. Dann hat das System genau eine Lösung: $\mathbb{L} = \{(2, 2, 2)\}$.
Betrachte nun $a \neq 0$. Wegen $1 - a^3 = (1 - a)(a^2 + a + 1)$ und $1 - a^2 = (1 - a)(1 + a)$ sind diese Term Null, falls $a = 1$ respektive $a = \pm 1$ ist. ($a^2 + a + 1$ hat keine reelle Nullstellen; es genügt daher, die Fälle $a = \pm 1$ und $a \neq \pm 1$ zu betrachten.)
Sei $a = 1$. Dann haben wir wegen $(\star)$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

also hat das System unendlich viele Lösungen:

$$a = 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(s, t, 2 - s - t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$$

Sei $a = -1$. Nun ist (wiederum aus $(\star)$)

$$\begin{array}{r} \\ \\ \text{III}-\text{II} \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

und das System hat unendlich viele Lösungen: $z = 2$, $y = t \in \mathbb{R}$, $x = 2 + y - z = t$, d.h.

$$a = -1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{(t, t, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Das System hat genau eine Lösung, mit $z = \frac{2(1-a)}{(1-a)(a^2+a+1)} = \frac{2}{a^2+a+1}$, $y = \frac{2(1-a)-a^2(1-a)z}{(1-a)(1+a)} = \frac{2}{a^2+a+1}$ und $x = 2 - ay - a^2 z = \frac{2}{a^2+a+1}$, d.h.

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \frac{2}{a^2+a+1}(1,1,1) \right\}.$$

Insbesondere gibt es (für $u = w = v = 2$) kein $a \in \mathbb{R}$ so, dass das System keine Lösung hat. **HINWEIS:** Benützt man beim zweiten Eliminationsschritt das Pivotelement als $1-a^2$ so muss bereits dort eine Fallunterscheidung gemacht werden, d.h.: $1 - a^2 \neq 0$.

(b) Für $a = -1$ haben wir mit $(\star)$

$$\begin{array}{r} \\ \\ \mathrm{III} - \mathrm{II} \end{array} \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & u \\ 0 & 0 & 2 & v+u \\ 0 & 0 & 2 & w+v \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & u \\ 0 & 0 & 2 & v+u \\ 0 & 0 & 0 & w-u \end{array},$$

somit hat das System keine Lösung (betrachte die letzte Zeile), falls $u \neq w$ ist.

Multiple Choice

Jemand hat ein lineares Gleichungssystem mit 2 reellen Parametern α und β nach Gauss reduziert und folgende augmentierte Matrix erhalten

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha+1 & 0 & \beta^2-1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & \beta+1 \end{array}\right]$$

1. Für $\alpha = 2$ und beliebiges β hat das System genau eine Lösung.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Für $\beta \neq -1$ hat das System keine Lösung, denn die letzte Zeile ist $0 = \beta + 1 \neq 0$: ein Widerspruch.

2. Für $\alpha = 2$ und $\beta = -1$ hat das System genau eine Lösung.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Das System hat unendlich viele Lösungen, denn die letzte Zeile ist $0 = 0$; das ist immer wahr. Es bleiben 2 Gleichungen und 3 Unbekannte.

3. Für $\alpha \neq 2$ und beliebiges β hat das System genau eine Lösung.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Für $\alpha = -1$ und zum Beispiel $\beta = 0$ hat das System keine Lösung, denn Zeile 2 lautet $0 = -1$: ein Widerspruch.

4. Für $\beta = -1$ hat das System immer eine Lösung.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Zeilen 2 und 3 sind jeweils entweder $0 = 0$, dann gibt es unendlich viele Lösungen; oder ergeben $x_2 = 0$ bzw. $x_3 = 0$. In jedem Fall hat das System mindestens eine Lösung.

5. Für $\alpha = 3$ ist $x_1 = \frac{1}{8}(\beta^2 + 3)$, $x_2 = \frac{1}{4}(\beta^2 - 1)$, $x_3 = \beta + 1$ die einzige Lösung des Systems.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Die richtige Lösung ist $x_1 = \frac{1}{8}(\beta^2 - 12\beta + 3)$, $x_2 = \frac{1}{4}(\beta^2 - 1)$, $x_3 = \beta + 1$.

6. Für $\alpha = 2$ and $\beta = -1$ lautet die allgemeine Lösung

$$x_1 = 2 - \frac{3}{2}t, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Für x_3 gibt es kein Pivot, also ist $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Die zweite Zeile ergibt $x_2 = 0$, und die erste $2x_1 + 3t = 4$, also $x_1 = 2 - \frac{3}{2}t$.