

Lösung 4

1) Nur für die folgenden Wahlen kann man das Produkt bilden:

$A \cdot A$ mit Dimension $(2, 2) \times (2, 2) = (2, 2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$A \cdot Y$ mit Dimension $(2, 2) \times (2, 1) = (2, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$B \cdot A$ mit Dimension $(3, 2) \times (2, 2) = (3, 2)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$B \cdot Y$ mit Dimension $(3, 2) \times (2, 1) = (3, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$X \cdot A$ mit Dimension $(1, 2) \times (2, 2) = (1, 2)$:

$$(3 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (5 \ 5).$$

$X \cdot Y$ mit Dimension $(1, 2) \times (2, 1) = (1, 1)$, Ergebnis ist also eine Zahl:

$$(3 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (8) = 8.$$

$Y \cdot X$ mit Dimension $(2, 1) \times (1, 2) = (2, 2)$, Ergebnis ist also eine Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) Die Faktoren des Produkts $X \cdot Y$ haben Formate 1×2 und 2×1 , das Ergebnis ist vom Format 1×1 , es ist also eine Zahl:

$$(3 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (8) = 8.$$

Das Produkt $Y \cdot X$ hat dagegen Faktoren mit Formaten 2×1 und 1×2 , das Ergebnis ist also eine 2×2 -Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}.$$

Da wir $XY = (8)$ schon wissen, folgt $(XY)^2 = (8^2) = (64) = 64$

Der Ausdruck $X^2 \cdot Y^2$ ist dagegen nicht definiert, denn schon $X^2 = X \cdot X$ gibt es nicht wegen unpassender Formate. Insbesondere gilt für Matrizen *nicht* die Regel $(AB)^2 = A^2B^2$.

Das Quadrat der Summe ist

$$(A + C)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},$$

andererseits ist aber

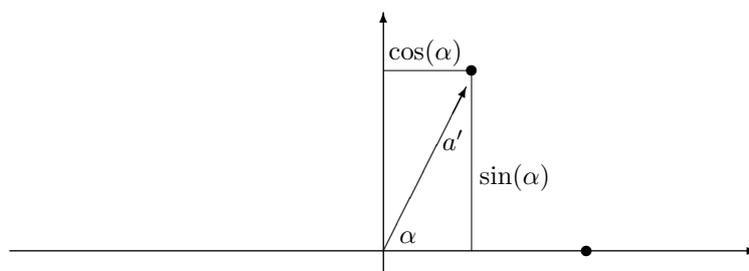
$$A^2 + 2AC + C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2 + 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Also gilt für beliebige Matrizen *nicht* die Regel $(A + C)^2 = A^2 + 2AC + C^2$.

Diese Regel gilt nur, wenn man A und B im Produkt vertauschen darf, also $AB = BA$ ist. Denn nur dann bekommt man durch Ausmultiplizieren

$$(A + B)^2 = (A + B) \cdot (A + B) = A(A + B) + B(A + B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + 2AB + B^2.$$

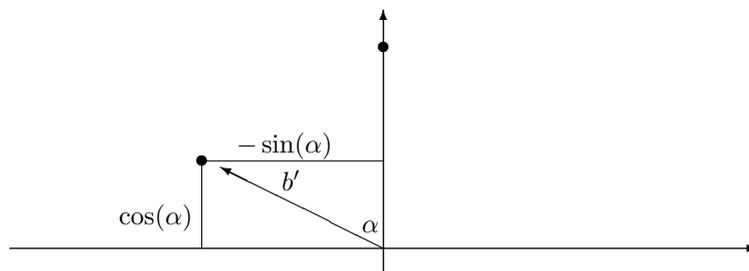
- 3) Zu a): Der durch a vom Ursprung aus markierte Punkt mit x -Koordinate 1 und y -Koordinate 0 in der Zeichenebene wird durch Drehung um den Winkel α in den Punkt a' überführt:



Da die Hypotenuse die Länge 1 besitzt, hat der neue Punkt die x -Koordinate $\cos(\alpha)$ und die y -Koordinate $\sin(\alpha)$. Das passt zu

$$a' = D_\alpha \cdot a = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Für den Punkt b mit x -Koordinate 0 und y -Koordinate 1 hat der um α gedrehte Punkt b' die x -Koordinate $-\sin(\alpha)$ und die y -Koordinate $\cos(\alpha)$:



passend zu

$$b' = D_\alpha \cdot b = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Zu b): Das Produkt $D_\alpha \cdot D_\beta$ multipliziert mit einem Vektor c dreht diesen erst um den Winkel β , und dann um den Winkel α , also insgesamt um den Winkel $\alpha + \beta$. Damit ist $D_\alpha \cdot D_\beta = D_{\alpha+\beta}$. Ebenso ist D_α^k eine Matrix, die den Vektor c genau k -mal um den Winkel α dreht, also um den Winkel

$k \cdot \alpha$, somit $D_\alpha^k = D_{k\alpha}$. Die inverse Matrix D_α^{-1} wirkt wie die Umkehrung von D_α , es ist diejenige Matrix welche die Drehung um α wieder rückgängig macht, also die Drehung um $-\alpha$, somit $D_\alpha^{-1} = D_{-\alpha}$.

Zu c): Die Drehmatrix ist symmetrisch, wenn $D_\alpha^T = D_\alpha$ gilt, das ist wegen des Vorzeichens oben rechts aber nur möglich, wenn $\sin(\alpha) = 0$ ist, der Wert $\cos(\alpha)$ auf der Diagonalen spielt keine Rolle. Der Sinus ist Null falls α ein ganzzahliges Vielfaches von π ist (bzw. 0° und 180° im Gradmass). Umgekehrt ist $D_\alpha^T = -D_\alpha$ genau dann, wenn $\cos(\alpha) = 0$ ist, nun spielt der Sinus keine Rolle. Das ist der Fall falls $\alpha - \frac{\pi}{2}$ ein ganzzahliges Vielfaches von π ist (bzw. 90° und 270° im Gradmass).

Multiple Choice Aufgabe

1. Die Lösungsmenge ist ein (eventuell nulldimensionaler) Unterraum.

(a) Richtig.

✓ (b) Falsch.

Nein. Bei einem Unterraum gilt (unter anderem), dass für jeden Vektor y im Unterraum auch λy im Unterraum liegt, für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$. Nehmen wir einen Vektor y , für den $Ay = b$ gilt, und betrachten λy . Für dieses gilt $A(\lambda y) = \lambda(Ay) = \lambda b$, also ist dies keine Lösung von $Ax = b$.

2. Die Menge der Differenzen von zwei Lösungen ist (leer oder) ein Unterraum.

✓ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Ja. Wenn $Ax = b$ keine Lösungen hat, ist die Aussage trivial. Ansonsten folgt aus $Ax = b$ und $Ay = b$ für die Differenz $z = x - y$ dass $Az = 0$. Umgekehrt gilt für jedes z mit $Az = 0$, dass $x = y + z$ die Gleichung $Ay = b$ erfüllt, falls $Ax = b$ gilt. Also ist $z = x - y$ die Differenz von zwei Lösungen.

Demnach ist die Menge der Differenzen identisch zur Lösungsmenge von $Ax = 0$. Dies ist ein Vektorraum.

Es seien $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(6)}$ Vektoren im \mathbb{R}^4 . Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

3. Diese Vektoren spannen den \mathbb{R}^4 auf.

(a) sicher

Nein, es könnten alle Vektoren gleich dem Nullvektor sein.

✓ (b) möglicherweise

(c) sicher nicht

Falls die Liste z.B. die Standard-Basisvektoren $(1, 0, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 0, 1)^T$ enthält, dann wird der ganze \mathbb{R}^4 aufgespannt.

4. Diese Vektoren sind linear unabhängig.

(a) sicher

Nein. Wären die Vektoren linear unabhängig, so hätte für die Matrix A , welche diese Vektoren als Spalten hat, das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung. Mit dem Gaußalgorithmus sieht man aber, dass ein System mit 4 Gleichungen und 6 Unbekannten in jedem Fall mindestens zwei freie Variablen besitzt.

(b) möglicherweise

Nein. Wären die Vektoren linear unabhängig, so hätte für die Matrix A , welche diese Vektoren als Spalten hat, das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung. Mit dem Gaußalgorithmus sieht man aber, dass ein System mit 4 Gleichungen und 6 Unbekannten in jedem Fall mindestens zwei freie Variablen besitzt.

✓ (c) sicher nicht

Richtig. Wären die Vektoren linear unabhängig, so hätte für die Matrix A , welche diese Vektoren als Spalten hat, das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung. Mit dem Gaußalgorithmus sieht man aber, dass ein System mit 4 Gleichungen und 6 Unbekannten in jedem Fall mindestens zwei freie Variablen besitzt.

5. Seien $b^{(1)}, \dots, b^{(4)} \in \{a^{(1)}, \dots, a^{(6)}\}$. Dann ist $(b^{(1)}, \dots, b^{(4)})$ eine Basis des \mathbb{R}^4 .

(a) sicher

Nein, die Auswahl könnte einen Vektor mehrfach enthalten, oder den Nullvektor enthalten.

✓ (b) möglicherweise

Richtig, falls die Auswahl z.B. aus den Standard-Basisvektoren $(1, 0, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 0, 1)^T$ besteht.

(c) sicher nicht

Nein, die Auswahl könnte gerade aus den Standard-Basisvektoren $(1, 0, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 0, 1)^T$ bestehen.

6. Ein Vektor habe bezüglich der Basis $B := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ den Koordinatenvektor $(-1, -1)^T$.
Der Koordinatenvektor bezüglich der Standardbasis ist ...

(a) $(\frac{1}{2}, 0)^T$

(b) $(-1, -1)^T$

(c) $(0, -2)^T$

✓ (d) $(2, 0)^T$

(e) $(1, 1)^T$

Wenn Basisvektoren $b^{(1)}, \dots, b^{(n)}$ im \mathbb{R}^n und Koordinatenvektor $(k_1, \dots, k_n)^T$ eines Vektors k gegeben sind, so bedeutet das, dass $k = k_1 b^{(1)} + \dots + k_n b^{(n)}$. Hier sind wir im \mathbb{R}^2 , und haben als Basis die beiden Vektoren $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$. Der Vektor mit Koordinaten $(-1, -1)$ bezüglich dieser Basis ist also $-1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, hat also bezüglich der Standard Basis die Koordinaten $(2, 0)$.