Lösung 5

1) Das Invertierungsverfahren für die Matrix A ergibt

A		I_2	
1	1	1	0
1	-1	0	1
1	1	1	0
0	-2	-1	1
1	1	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

und damit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot A\,.$$

Für die Matrix B erhalten wir

B			I_3		
1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
3	0	4	0	0	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	-3	0	1
1	0	0	4	0	-1
0	1	0	3	1	-1
0	0	1	-3	0	1

also ist

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Invertierungsverfahren ergibt für die Matrix C dagegen

C				I_4				Operation
2	1	0	0	1	0	0	0	-2III
0	0	1	1	0	1	0	0	
1	0	0	0	0	0	1	0	
0	3	3	3	0	0	0	1	
0	1	0	0	1	0	-2	0	
0	0	1	1	0	1	0	0	
1	0	0	0	0	0	1	0	
0	3	3	3	0	0	0	1	-3I-3II
0	1	0	0	1	0	-2	0	
0	0	1	1	0	1	0	0	
1	0	0	0	0	0	1	0	
0	0	0	0	-3	-3	6	1	

Da eine Nullzeile aufgetreten ist, hat C nicht vollen Rang, und ist damit nicht invertierbar. Das Verfahren bricht an dieser Stelle ab.

Eine Produktmatrix der Form $C = cc^T$ ist für $n \geq 2$ niemals invertierbar, denn jede Zeile ist eine Vielfache jeder anderen, d. h. die Zeilenstufenform von C hat $c_1 \cdot c^T$ als erste Zeile, und sonst nur Nullen.

2) Wir berechnen die Determinante von U mit Hilfe der Zeilenstufenform:

$$\det(U) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Spalte 1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Spalte 2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} \overset{\text{Spalte 3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 40 = 160\,.$$

Die Determinante von X berechnen wir mit der 3×3-Regel:

$$\det(X) = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 + a^2 + a - a^2 - a^2 - a^2 = a^3 - 2a^2 + a = a \cdot (a^2 - 2a + 1) = a \cdot (a-1)^2\,.$$

Für die Matrix Y berechnen wir wieder die Zeilenstufenform (die für X verwendete Regel ist falsch falls $n > 3$ ist). Dabei vereinfacht sich die Rechnung sehr wenn man gleich zu Anfang möglichst viele b's aus der Determinante herausnimmt:

$$\begin{vmatrix} b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ b & 0 & 0 & b \\ 1 & b & b & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{I,II,II: } b}{=} b^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & b & b & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{III,IV}-\text{I}}{=} b^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & b-1 & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{IV}+(b-1)\text{III}}{=} b^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & b & b-1 \end{vmatrix} \overset{\text{IV}-b\text{II}}{=} b^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Tausch}}{=} (-1) \cdot b^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -b^3\,.$$

Dabei beachten wir, dass bei einem Zeilentausch das Vorzeichen der Determinante gedreht wird. Diese Aussage ist für alle $b \in \mathbb{R}$ richtig, eine Fallunterscheidung ist nicht notwendig da nirgends durch b dividiert wurde.

Die grundlegende Regel zur Prüfung der Invertierbarkeit ist

$$A \text{ invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Voller Rang: } r = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(A) \neq 0\,.$$

Also erhalten wir: U ist invertierbar (da $\det(U) \neq 0$), X ist invertierbar wenn $a \neq 0, 1$ ist (denn nur dann ist $\det(X) \neq 0$), und Y ist invertierbar wenn $b \neq 0$ ist.

3) Zu a): Wir das Transponierte von AB mit AB, und erhalten mit Hilfe der Rechenregel $(AB)^T = B^T A^T$.

$$(AB) \cdot (AB)^T = A \cdot \underbrace{B \cdot B^T}_{=I_2} \cdot A^T = A \cdot I_2 \cdot A^T = A \cdot A^T = I_2$$

weil A und B jeweils orthogonal sind. Das das Produkt von AB mit seiner Transponierten die Einheitsmatrix ist, ist auch AB orthogonal.

Zu b)): Die Matrix H ist orthogonal, denn es ist $H = \frac{1}{\sqrt{2}}A$ mit der Matrix A aus Aufgabe 13. Dort wurde $A^{-1} = \frac{1}{2}A$ gezeigt, woraus nach Multiplikation von $\sqrt{2}$ mit A die Gleichung $H^{-1} = H = H^T$ folgt. Die Matrix H ist ein Beispiel für eine Matrix die symmetrisch, orthogonal, und gleichzeitig ihr eigenes Inverses ist. Die Matrix Z ist nicht orthogonal, denn es gilt

$$ZZ^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \neq I_3 \,.$$

Die Matrix G ist auch nicht orthogonal:

$$GG^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} \neq I_3 \,.$$

Das ist ein Beispiel für eine Matrix, die $\det(G) = 1$ erfüllt aber trotzdem nicht orthogonal ist. Die Matrix J ist dagegen orthogonal, denn es gilt $J \cdot J^T = I^4$.

Multiple Choice Aufgabe

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Die Determinante der Matrix A beträgt

(a) 7

√ (b) -28

(c) 33

(d) 0

Da die Matrix eine obere Dreiecksmatrix ist, ist die Determinante das Produkt der diagonalen Element. Also git $\det(A) = 2 \cdot 7 \cdot (-2) = -28$.

2. Die Matrix A ist invertierbar

(a) Falsch.

√ (b) Richtig.

Die Matrix A ist invertierbar, da die Determinant nicht null ist.

Betrachte die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Die Matrix B ist invertierbar.

√ (a) Falsch.

(b) Richtig.

Die Matrix B ist nicht invertierbar, da die Zeilen linear abhängig sind. Die dritte Zeile ist die Summe der ersten und der zweiten Zeile.

Betrachte die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

4. Nehme an, dass $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl ist für alle i, j. Falls C invertierbar ist und $\det(C^{-1})$ ebenfalls eine ganze Zahl ist, so sind mögliche Werte für $\det(C)$

√ (a) $+1$ oder -1

(b) $+1$

(c) die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Zuerst bemerken wir, dass $\det(C)$ eine ganze Zahl ist, da die c_{ij} ganze Zahlen sind. Da zusätzlich gilt, dass $\det(C^{-1}) = \frac{1}{\det(C)}$ eine ganze Zahl ist, kommen für $\det(C)$ nur die Werte $+1$ und -1 in Frage. Der Wert -1 ist eine Möglichkeit, wie das Beispiel

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zeigt.

5. Angenommen es gibt eine invertierbare Matrix D, so dass $\det(DC) = 0$. Was können wir dann über $\det(C)$ sagen?

(a) Es ist keine Aussage möglich.

(b) $\det(C) = 1$

$\checkmark$ (c) $\det(C) = 0$

Da D invertierbar ist gilt $\det(D) \neq 0$. Weiterhin bemerken wir, dass $\det(DC) = \det(D)\det(C) = 0$. Somit muss gelten $\det(C) = 0$.

6. Sei E eine 3×3 Matrix mit $\det(E) = 1$. Dann gilt

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\checkmark$ (a) Falsch.

(b) Richtig.

Ein mögliches Gegenbeispiel ist

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal.

$\checkmark$ (a) Falsch.

(b) Richtig.

Es gilt

$$F^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Doch

$$FF^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_3.$$

8. Sei G eine orthogonale Matrix. So ist auch G^T orthogonal.

(a) Falsch.

√ (b) Richtig.

Die Matrix G^T ist orthogonal, falls gilt $(G^T)^T = (G^T)^{-1}$. Tatsächlich prüfen wir $(G^T)^T = G = (G^{-1})^{-1} = (G^T)^{-1}$, wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass G orthogonal ist.