Lösung 6

1) Angenommen die vier Vektoren sind linear abhängig, dann gibt es Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, nicht alle Null, die eine Nullkombination $\alpha_1 x^{(1)} + \cdots \alpha_4 x^{(4)} = 0$ ergeben. Schreiben wir die Vektoren als Spalten in eine Matrix X und die Koeffizienten α_j in einen Spaltenvektor $a \in \mathbb{R}^4$, so bedeutet dass $X \cdot a = 0$ als ein Matrixprodukt. Dann kann X aber nicht invertierbar sein, denn sonst könnte man alles mit X^{-1} multiplizieren und hätte $a = X^{-1} \cdot 0 \ = \ 0$, aber a war nicht der Nullvektor weil nicht alle Koeffizienten in der Linearkombination Null sind. Also ist X nicht invertierbar, d.h. $\det(X) = 0$.

Wir rechnen also die Determinante von X aus, und verwenden dabei das Laplace-Verfahren:

$$\det(X) \ = \begin{vmatrix} b+2a-1 & -1 & b-a & b+a \\ a & b & 0 & a \\ 2b+2 & 3 & b+a & 2b+a+1 \\ 2b+a+1 & 1 & b & 2b+a+1 \end{vmatrix} \underset{\text{Spalten IV}-\text{I}}{=} \begin{vmatrix} b+2a-1 & -1 & b-a & 1-a \\ a & b & 0 & 0 \\ 2b+2 & 3 & b+a & a-1 \\ 2b+a+1 & 1 & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Zeilen III+I}}{=} \begin{vmatrix} b+2a-1 & -1 & b-a & 1-a \\ a & b & 0 & 0 \\ 3b+2a+1 & 2 & 2b & 0 \\ 2b+a+1 & 1 & b & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{Spalte IV}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} -(1-a) \cdot \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 3b+2a+1 & 2 & 2b \\ 2b+a+1 & 1 & b \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{Zeilen II}-2\text{III}}{=} -(1-a) \cdot \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b-1 & 0 & 0 \\ 2b+a+1 & 1 & b \end{vmatrix} \underset{\text{Zeile II}}{\overset{\text{Laplace}}{=}} (1-a)(-b-1) \cdot \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{vmatrix} \ = \ (1-a)(-b-1) \cdot b^2 \, .$$

Dieser Ausdruck ist nur Null für $a - 1$, $b = -1$ oder $b = 0$. In diesen Fällen sind die vier Vektoren $x^{(1)}, \ldots, x^{(4)}$ linear abhängig. Sie sind also linear unabhängig wenn $a \neq 1$ und $b \neq 0, -1$ ist.

2) (a) Die Aussage ist richtig, denn Zeilenumformungen verändern den Rang nicht.

(b) Diese Aussage ist falsch, der von den Spalten erzeugte Unterraum wird durch Zeilenumformungen verändert. Ein Gegenbeispiel ist

$$A \ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Tausch}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ A' \, .$$

Im Unterraum der von den Spalten von A erzeugt wird liegt der Vektor $(0, 0, 1)^T$. Er liegt aber nicht im Unterraum der von den Spalten von A' erzeugt wird, denn in diesem Raum ist die letzte Komponente immer Null.

(c) Diese Aussage ist richtig, denn die Zeilenumformungen ändern den von den Zeilen erzeugten Unterraum nicht, da sie Linearkombinationen aus den Zeilen bilden, aus denen besteht der Unterraum aber gerade.

(d) Hat das lineare Gleichungssystems $Ax = b$ die Lösung x, so hat das umgeformte System $A'x = b'$ die gleiche Lösung, wobei b zur neuen rechten Seite b' umgeformt wird. Die Umformungen die aus A die Matrix A' machen verändern aber den Nullvektor nicht, also stimmen die Lösungsmengen $Ax = 0$ und $A'x = 0$ überein.

(e) Diese Aussage ist falsch, weil $b \neq b'$ sein kann wenn b nicht der Nullvektor ist. Ein Gegenbeispiel ist wieder

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Tausch}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; A' \,.$$

mit rechter Seite $b = (0,0,1)^T$. Das System $Ax = b$ ist lösbar mit $x = (1,0)^T$, das System $A'x = b$ ist dagegen unlösbar.

(f) Die Aussage ist falsch, Zeilenmultiplikationen und Zeilentausch verändern die Determinante:

$$\det(A) = -1 \;\;,\;\; A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Tausch}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;=\; A' \;\;,\;\; \det(A') = 1 \,.$$

(g) Diese Aussage ist richtig: Eine quadratische Matrix ist invertierbar genau dann wenn ihre Determinante nicht Null ist. Diese Eigenschaft wird durch die Zeilenumformungen nicht verändert, da sie unabhängig von Vielfachen/Vorzeichen ist.

(h) Diese Aussage ist falsch, die Matrizen A und A' aus b) beschreiben verschiedene Abbildungen (weil beispielsweise $b = (0,0,1)^T$ ein Bildvektor der ersten, aber kein Bildvektor der zweiten Abbildung ist).

(i) Das ist richtig, weil die Kerne gerade die Mengen aus Teil (d) sind.

(j) Das ist falsch wegen Teil (e).

3) also haben wir die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems zu berechnen. Die Zeilenstufenform dazu ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Tausch}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) .$$

Wir lesen hier auch ab, dass $\det = 2$ die Determinante der Koeffizientenmatrix von F ist. Wegen $k = n - r = 3 - 3 = 0$ gibt es keine Richtungsvektoren, und der einzige Ortsvektor ist $(0,0,0)$. Also ist der Kern $\mathrm{Kern}(F) = \{0\}$ die Menge, die nur den Nullvektor enthält. Das kann man auch daran sehen, dass F wegen $\det \neq 0$ injektiv sein muss. Das Bild ist dagegen die Menge der von den Spalten der Matrix erzeugten Vektoren:

$$\mathrm{Bild}(F) \;=\; \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} .$$

Wegen $\det \neq 0$ sind diese linear unabhängig, also eine Basis. Drei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$ erzeugen aber schon den ganzen Raum $\mathbb{R}^3$, also kann man auch gleich $\mathrm{Bild}(F) = \mathbb{R}^3$ schreiben.

Die Abbildung G schreiben wir nun erstmal als Multiplikation mit einer Matrix:

$$G(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Mit der 3×3-Regel sieht man, dass hier die Determinante der Koeffzientenmatrix hier 2 ist. Also ist wieder $\mathrm{Kern}(G) = \{0\}$ und $\mathrm{Bild}(G) = \mathbb{R}^3$.

Bei der letzten Abbildung ist

$$H(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ -z-2x \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Hier ist die Determinante der Koeffizientenmatrix Null, wir müssen also den Kern diesmal mit der Zeilenstufenform ausrechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III}+2\text{I}]{\text{II}-\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Tausch}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Es ist $k = n - r = 1$, es gibt also einen freien Parameter $t \in \mathbb{R}$ für die dritte Spalte. Ablesen ergibt dann $x_3 = t$, $x_2 = -\frac{1}{2}t$ und $-\frac{1}{2}t$, und damit

$$\mathrm{Kern}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Das Bild ist dagegen das Erzeugnis der Spalten der Koeffizientenmatrix:

$$\mathrm{Bild}(H) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dies ist zwar keine Basis (da die drei Vektoren wegen $\det = 0$ linear abhängig sind), eine Basis war in dieser Aufgabe aber auch nicht gefragt.

Man sieht dass der Vektor $(1, 1, -2)^T$ sowohl im Kern wie auch um Bild von H liegt, das ist durchaus erlaubt.

Multiple Choice Aufgaben

1. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

(a) Das Bild von A ist ganz $\mathbb{R}^3$.

(b) Der Kern von A hat Dimension 0.

√ (c) weder noch

Da die ersten beiden Zeilen von A linear abhängig sind, hat A Zeilenrang 2 und damit auch Spaltenrang 2. Also hat das Bild von A Dimension 2, kann also nicht ganz $\mathbb{R}^3$ sein. Es folgt, dass der Kern Dimension 1 hat, da $\dim \mathrm{Kern}(A) + \dim \mathrm{Bild}(A) = 3$.

2. Seien

$$B_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ohne zu rechnen $\det(B_1 B_2)$.

(a) $\det(B_1 B_2) = -1$.

√ (b) $\det(B_1 B_2) = 0$.

(c) $\det(B_1 B_2) = 1$.

Das Produkt $B_1 B_2$ ist eine 3×3-Matrix. Also ist $\det(B_1 B_2)$ genau dann $\neq 0$, wenn der Rang von $B_1 B_2$ gleich 3 ist. Da der Rang ausserdem die Dimension des Bildes ist, hat $B_1 B_2$ genau dann Rang 3, wenn das Bild ganz $\mathbb{R}^3$ ist. Da die durch $B_1 B_2$ induzierte lineare Abbildung die Komposition der zu B_1 und B_2 gehörigen linearen Abbildungen ist, gilt $\mathrm{Bild}(B_1 B_2) \subseteq \mathrm{Bild}(B_1)$. Da das Bild von B_1 maximal Dimension 2 haben kann, hat also auch das Bild von $B_1 B_2$ maximal Dimension 2. Insgesamt ergibt sich also $\det(B_1 B_2) = 0$.

3. Für alle $n \times n$-Matrizen C und D gilt $\det(C + D) = \det C + \det D$.

(a) wahr

√ (b) falsch

Z.B. gilt für $C = I_n$ und $D = -I_n$

$$\det(C + D) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \neq -1 = \det(-I_n) = \det(I_n \cdot (-I_n)).$$

4. Seien $m, n > 0$ zwei verschiedene natürliche Zahlen und sei M eine $m \times n$-Matrix. Dann gilt $\dim \mathrm{Kern}\, M = \dim \mathrm{Kern}\, M^T$.

(a) wahr

√ (b) falsch

Sei z.B. $M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\dim \mathrm{Kern}\, M = 3$ und $\dim \mathrm{Kern}\, M^T = 2$.