Lösung 7

1) Die Abbildung F wird durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben, mit

$$A \cdot x = F(x) = \begin{pmatrix} x+t \\ x+y \\ y+z \\ z+t \end{pmatrix} .$$

Das Bild von F wird dann von den Spalten von A erzeugt, diese sind allerdings nicht linear unabhängig, also keine Basis.

Wir bestimmen zuerst die Zeilenstufenform von A, um den Rang von F zu bekommen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Zeilenstufenform hat 3 Pivots: $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(F) = \dim(\mathrm{Bild}(F)) = 3$. Wir müssen aus A also 3 linear unabhängige Spalten auswählen, beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Diese Vektoren haben (als Zeilen) Stufenform ohne Leerzeilen, sie sind also linear unabhängig, und bilden eine Basis von $\mathrm{Bild}(F)$.

Der Kern ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, wir lesen die Lösungsmenge aus der Zeilenstufenform ab:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \mathrm{Kern}(F) = \mathrm{Kern}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Wir lesen einen erzeugenden Basisvektor dieser Menge ab:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Abbildung

$$F^{(2)}(x) = F(F(x)) = F \begin{pmatrix} x+t \\ x+y \\ y+z \\ z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z+2t \\ 2x+y+t \\ x+2y+z \\ y+2z+t \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

mit der Matrix

$$B \;=\; A^2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Zeilenstufenform von B ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III}-\text{I}]{\text{II}-2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}-\text{II}]{\text{III}-2\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV}-\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang ist wieder 3, also haben wir die gleiche Situation wie für die Matrix A:

$$\mathrm{Kern}(F^{(2)}) \;=\; \left\{x \in \mathbb{R}^4 : Bx = 0\right\} \;=\; \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathrm{Bild}(F^{(2)}) \;=\; \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

wobei die Basis für das Bild aus drei beliebigen linear unabhängigen Spalten aus B besteht.

2) Zu a):

- Die Menge L_1 ist kein Unterraum weil beispielsweise der Vektor $(1,0,0)^T$ in L_1 liegt, aber nicht sein Vielfaches $(2,0,0)^T$, damit sind die Unterraumbedingungen verletzt.
- Die Menge L_2 ist ebenfalls kein Unterraum: Der Nullvektor $(0,0,0)^T$ ist nicht enthalten.
- Die Menge L_3 ist ein Unterraum, und zwar $L_3 = \mathrm{span}(\{(1,1,1)^T\})$.
- Die Menge L_4 ist ein Unterraum, und zwar $L_4 = \mathrm{span}(\{(2,0,1)^T, (0,2,1)^T\})$.
- Die Menge L_5 ist kein Unterraum, weil der Nullvektor nicht enthalten ist.
- Die Menge L_6 ist kein Unterraum, weil der Nullvektor nicht enthalten ist.
- Die Menge L_7 ist kein Unterraum: Da der Nullvektor in L_3 liegt, ist er nicht in $L_7 = L_4 \backslash L_3$ enthalten.
- Die Menge L_8 ist ein Unterraum, denn wegen $L_3 \subseteq L_4$ ist $L_8 = L_3 = \mathrm{span}(\{(1,1,1)^T\})$.

Zu b): Jede Menge die ein Unterraum ist, ist automatisch auch Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit Ortsvektor $x^{(0)} = 0$, also ist die Frage für L_3, L_4, L_8 schon beantwortet. Die Richtungsvektoren sind dann die Erzeuger aus Teil (a). Für die anderen Mengen gilt:

- L_1 ist die Sphäre im $\mathbb{R}^3$, sie ist nicht die Lösungsmenge eines linearen, sondern eines quadratischen Gleichungssystems.
- L_2 ist nicht Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, weil ein gemischter Term xy auftritt.
- L_5 ist nicht Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems, aber nicht eines Gleichungssystems.
- L_6 ist kein Unterraum, aber die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, weil man sie in der Form

  $$L_6 \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

  schreiben kann.
- Die Menge L_7 ist nicht Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

3) Zu a): Eine Zeilenstufenform der Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ihr Rang ist also $r = 2$. Damit hat der Kern Dimension $k = n - r = 1$, es genügt also, einen Richtungsvektor des Kerns aus der Zeilenstufenform abzulesen, beispielsweise

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\left\{ x^{(1)} \right\} .$$

Das Bild hat dagegen $r = 2$ erzeugende Vektoren, wir wählen beispielsweise die ersten beiden Spalten von A da diese linear unabhängig sind:

$$\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} .$$

Zu b): Ebenso berechnet man Kern und Bild von

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

mit Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Das ist die gleiche Zeilenstufenform wie in Teil a), also ist

$$\mathrm{Kern}(A^T A) = \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} .$$

Damit gibt es umgekehrt $2 = 3 - 1$ Basisvektoren im Bild, wir können beispielsweise die Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

von $A^T A$ nehmen.

Zu c): Eine Näherungslösung ist eine Lösung des Normalensystems $A^T A x = A^T b$, dabei ist

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} , \quad A^T \cdot b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Wir bringen die augmentierte Matrix zum System $A^T A x = A^T b$ auf Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

Wir haben Rang $r = 2$ und $k = 1$ freie Parameter. Ablesen der Orts- und Richtungsvektoren ergibt die Lösungsmenge

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : A^T A x = A^T b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} t \\ \frac{1}{2}(1 - t) \\ t \end{pmatrix} t \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Der span auf der linken Seite ist gerade der Kern von A aus Teil a). Jeder Vektor aus dieser Menge ist eine Lösung des kleinste-Quadrate-Systems $A^TAx = A^Tb$, und damit eine Näherungslösung für das (unlösbare) Ursprungssystem $Ax = b$.

Zu d): Die Menge der Bildvektoren ist $A \cdot L = \{Ax : x \in L\}$, wir haben also

$$Ax \;=\; A \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \;=\; A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}}_{=0}$$

mit den Orts-/Richtungsvektoren aus Teil (b). Also ist

$$A \cdot x \;=\; A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Der Parameter t spielt hier keine Rolle mehr, denn sämtliche Vektoren aus L führen zum gleichen Bildvektor. Sein Abstand zum Ziel b ist

$$\|Ax - b\| \;=\; \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\| \;=\; \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} + 1} \;=\; \sqrt{\frac{3}{2}} .$$

4) Angenommen A ist orthogonal, dann berechnen wir die Länge von $y = Ax$ statt x: Es ist

$$\|y\|^2 \;=\; y^T \cdot y \;=\; (Ax)^T \cdot (Ax) \;=\; x^T A^T \cdot Ax \;=\; x^T \cdot \underbrace{(A^T A)}_{=I} \cdot x \;=\; x^T \cdot x \;=\; \|x\|^2 .$$

Aus $\|y\|^2 = \|x\|^2$ folgt $\|y\| = \|x\|$ weil die Beträge nicht negativ sind, also hat die Multiplikation mit A den Betrag von x nicht verändert.

5) Multiple Choice

Die folgenden vier Vektoren bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$. D.h. sie sind paarweise orthogonal und es gilt $\|a^{(i)}\| = 1$ für $i = 1, \ldots, 4$:

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \\ c \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ -c \\ d \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} e \\ f \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \\ h \end{pmatrix}.$$

1. Welche der folgenden Werte sind möglich?

√ (a) $c = \frac{1}{2}$

(b) $c = \frac{1}{4}$

√ (c) $c = -\frac{1}{2}$

(d) $c = 1$

Da der Vektor $a^{(1)}$ Norm 1 hat, gilt $\sqrt{c^2 + c^2 + c^2 + c^2} = 1$, also $c^2 = \frac{1}{4}$, d.h. $c = \pm\frac{1}{2}$.

2. Welche der folgenden Werte sind möglich?

(a) $d = c$

√ (b) $d = -c$

(c) $d = 0$

(d) $d = 2c$

Da $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ orthogonal zueinander sind, gilt $a^{(1)} \cdot a^{(2)} = 0$, also $c^2 + c^2 - c^2 + cd = 0$, also $d = -c$.

3. Welche der folgenden Wertepaare sind möglich?

(a) $e = f = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

√ (b) $e = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ f = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(c) $e = 2,\ f = -2$

(d) $e = f = 1$

Weil $a^{(1)} \cdot a^{(3)} = 0$ haben wir $ce + cf = 0$, also $f = -e$. Weiter hat $a^{(3)}$ Norm 1, also ist $\sqrt{e^2 + (-e)^2 + 0^2 + 0^2} = 1$, d.h. $2e^2 = 1$, also $e = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $f = \mp\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

4. Wieviele verschiedene Lösungen gibt es insgesamt für die Einträge a, b, c, d, e, f?

(a) 2

(b) 4

(c) 6

√ (d) 8

Wir haben gesehen, dass d durch c und f durch e eindeutig bestimmt werden. Ebenso ist h durch g eindeutig festgelegt. Für c, e und g haben wir je zwei Möglichkeiten: $c = \pm\frac{1}{2}$, $e = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $g = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Insgesamt haben wir also $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten.