D-CHAB **FS 2019**
Grundlagen der Mathematik II **Dr. Marcel Dettling**

Serie 3

1) Gleichungssysteme in der Ebene
Betrachte die folgenden linearen Gleichungssysteme:

$$(1)\;\; 2x_1 - x_2 = 0 \;\;,\;\; (2)\;\; x_1 + x_2 = 3 \;\;,\;\; (3)\;\; x_1 = 3x_2 - 5 \;\;,\;\; (4)\;\; \left| \begin{array}{c} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 = 3x_2 - 5 \end{array} \right| .$$

(a) Gebe die Lösungsmengen der Systeme (1),(2) und (3) an.

(b) Skizziere die Lösungsmengen aus Aufgabe (a) als Geraden in $\mathbb{R}^2$.

(c) Stelle die Lösungsmenge von (4) mit Hilfe der Lösungsmengen von (1), (2) und (3) dar. Ist (4) lösbar?

2) Orts- und Richtungsvektoren
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 12 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} .$$

(a) Bringe die augmentierte Matrix zum System auf Zeilenstufenform und entscheide, ob das System lösbar ist. Bestimme den Rang r der Koeffizientenmatrix. Die Dimension k der Lösungsmenge entspricht der Anzahl der freien Parameter. Bestimme diese.

(b) Berechne die Lösungsmenge, und drücke sie durch Orts- und Richtungsvektoren aus.

(c) Prüfe Dein Ergebnis mit Mathematica: Der Befehl `NullSpace[A]` berechnet einen Satz Richtungsvektoren, `LinearSolve[A,b]` einen Ortsvektor zum System $Ax = b$.

Bemerkung (Tipp zu Aufgabe 2b und 2c)**.** *Ist A eine reele $n \times m$-Matrix, so ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystem $Ax = 0$ gegeben durch*

$$L(A, 0) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}.$$

Man kann zeigen, dass $L(A, 0)$ ein linerarer Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist. Die Dimension der Lösungsmenge entspricht der Anzahl freier Parameter, die wir durch das Lösen des Gleichungssystems mit dem Gauss-Algorihmus erhalten.

Analog definieren wir die Lösungsmenge des (inhomogenen) Gleichungssystem $Ax = b$ als die Menge

$$L(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b\},$$

wobei $b \in \mathbb{R}^m$.

Sei r die Dimension des Lösungsraumes $L(A, 0)$. Sind $\{v_1, \ldots, v_r\}$ r linear unabhängige Vektoren in $L(A, 0)$, so können wir jeden Vektor in $L(A, 0)$ durch eine Linearkombination der $\{v_1, \ldots, v_r\}$ darstellen. Also gilt, dass

$$L(A, 0) = \{\gamma_1 v_1 + \ldots \gamma_r v_r | \gamma_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, r\}.$$

Ist p eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$, so ist

$$L(A, b) = \{p + \gamma_1 v_1 + \ldots \gamma_r v_r | \gamma_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, r\}.$$

Wir bemerken, dass die Wahl der partikulären Lösung p und der Lösungsvektoren v_i des homogenen Gleichungssystem nicht eindeutig sind. Ist $\{v'_1, \ldots, v'_r\}$ eine weitere Wahl von r linear unabhängigen Vektoren in $L(A, 0)$ und p' eine andere partikuläre Lösung von $Ax = b$, so gilt

$$\begin{aligned} L(A, b) &= \{p + \gamma_1 v_1 + \ldots \gamma_r v_r | \gamma_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, r\} \\ &= \{p' + \gamma'_1 v'_1 + \ldots \gamma'_r v'_r | \gamma'_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, r\}. \end{aligned}$$

3) Mathematica und Parameter

Das LGS $\begin{pmatrix} c & 1 \\ c & d \\ 1 & c \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat zwei Parameter $c, d \in \mathbb{R}$.

(a) Sei $d = 1$ und $c = 2$. Löse das Gleichungssystem mit Hilfe von Mathematica. Wie viele Lösungen gibt es?

(b) Verwende den Befehl `Reduce` um das Gleichungssystem zu lösen. Lese aus dem Output von Mathematica die notwendigen Fallunterscheidungen ab, und lese für jeden der gefundenen Fälle die Lösungsmenge des Gleichungssystems aus dem Output ab.

(c) Nicht alle möglichen Werte von c und d werden in der Ausgabe von Mathematica abgedeckt. Formuliere die fehlenden Fälle, und bestimme die Lösungsmenge des LGS in diesen Fällen durch Rechnung per Hand.

4) Multiple Choice

Die Multiple Choice Aufgaben können online auf **echo.ethz.ch** gelöst werden.