D-CHAB — **FS 2019**
Grundlagen der Mathematik II — **Dr. Marcel Dettling**

Serie 4

1) Matrizen jonglieren

Prüfe für welche Paare aus den folgenden vier Matrizen das Matrixprodukt existiert. Berechne für diese Möglichkeiten das Produkt (es gibt 16 mögliche Kombinationen, von denen aber nur 7 ein Produkt liefern).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \; .$$

2) Rechenregeln für Matrizen

Gegeben seien diese Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \; .$$

Berechne die folgenden Matrizen mit Mathematica (falls die Ausdrücke existieren):

$$X \cdot Y \quad , \quad Y \cdot X \quad , \quad (X \cdot Y)^2 \quad , \quad X^2 \cdot Y^2 \quad , \quad (A + C)^2 \quad , \quad A^2 + 2AC + C^2 \; .$$

Für die beiden gegebenen Matrizen A und C ist die binomische Formel offensichtlich falsch. Finde eine möglichst einfache Bedingung für beliebige quadratische Matrizen A und C, so dass $(A+C)^2 = A^2 + 2AC + C^2$ gilt.

Matrizen werden in Mathematica mit dem Satzpunkt . multipliziert, um die Matrixmultiplikation von der Multiplikation mit einer Zahl zu unterscheiden. Die n-te Potenz bekommt man mit dem Befehl `MatrixPower[B,n]`.

3) Die Drehmatrix

Die Drehmatrix zum Winkel α (im Bogenmass) ist

$$D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \; .$$

(a) Zeige, dass die Multiplikation von D_α mit den Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von links (d.h. a geht über in $D_\alpha \cdot a$) die Vektoren jeweils um α gegen den Uhrzeigersinn dreht. Fertige eine Skizze zu beiden Vektoren an.

(b) Bestimme <u>ohne zu rechnen</u> die Matrizen $D_\alpha \cdot D_\beta$ für zwei Winkel α und β, D_α^k (die k-te Potenz von D_α) und D_α^{-1} (das Inverse von D_α ist diejenige Matrix, welche die Drehung um α wieder rückgängig macht). Hinweis: Diese Matrizen sind wieder Drehmatrizen.

(c) Welche Drehmatrizen sind symmetrisch ($D^T = D$), welche sind antisymmetrisch ($D^T = -D$)?

4) Multiple Choice

Die Multiple Choice Aufgaben können online auf **echo.ethz.ch** gelöst werden.