Serie 5

1) Matrizen invertieren
Berechne die Inversen der folgenden Matrizen per Hand (falls sie existieren):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} .$$

Überprüfe das Ergebnis mit `Mathematica` (mit dem Befehl `Inverse[A]`).

Zu einem Spaltenvektor $c \in \mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ konstruieren wir die Produktmatrix $C = c \cdot c^T$ vom Format $n \times n$. Ist sie invertierbar?

2) Die Determinante
Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen per Hand und überprüfe das Ergebnis mit `Mathematica` (Befehl `Det[A]`):

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad , \quad Y = \begin{pmatrix} b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b \\ b & 0 & 0 & b \\ 1 & b & b & 0 \end{pmatrix} .$$

Entscheide anhand der Determinanten, ob diese Matrizen invertierbar sind (ggf. mit Fallunterscheidungen).

3) Orthogonale Matrizen

Eine Matrix M ist orthogonal, falls M quadratisch ist, und $M \cdot M^T = I$ bzw. $M^{-1} = M^T$ gilt.

(a) Zeige mit Hilfe der Rechenregeln für Matrizen: Sind A und B orthogonal, so ist auch $A \cdot B$ orthogonal.

(b) Prüfe, ob die folgenden Matrizen orthogonal sind:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad Z = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

4) Multiple Choice
Die Multiple Choice Aufgaben können online auf **echo.ethz.ch** gelöst werden.