

Serie 6

1) Lineare Unabhängigkeit

Bestimme mit Hilfe der Determinanten die Paare (a, b) in \mathbb{R} für welche die Vektoren

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} b + 2a - 1 \\ a \\ 2b + 2 \\ 2b + a + 1 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ b \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} b - a \\ 0 \\ b + a \\ b \end{pmatrix}, \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} b + a \\ a \\ 2b + a + 1 \\ 2b + a + 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

2) Die Zeilenstufenform

Es sei A eine Matrix vom Format $n \times m$, und A' eine aus A gebildete Zeilenstufenform. Entscheide, welche der folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

- (a) Der Rang von A ist der Rang von A' .
- (b) Das Erzeugnis der Spalten von A ist das Erzeugnis der Spalten von A' .
- (c) Das Erzeugnis der Zeilen von A ist das Erzeugnis der Zeilen von A' .
- (d) Die Lösungsmenge des LGS $Ax = 0$ ist die Lösungsmenge des LGS $A'x = 0$.
- (e) Die Lösungsmenge des LGS $Ax = b$ ist die Lösungsmenge des LGS $A'x = b$ für jedes $b \in \mathbb{R}^n$.
- (f) Die Determinante von A ist die Determinante von A' .
- (g) A ist invertierbar genau dann wenn A' invertierbar ist.
- (h) Die linearen Abbildungen $F(x) = Ax$ und $G(x) = A'x$ stimmen überein.
- (i) Die Kerne von F und G stimmen überein.
- (j) Die Bildmengen von F und G stimmen überein.

Falls eine Aussage wahr ist, gib eine kurze Begründung warum sie wahr ist.

Falls eine Aussage falsch ist, gib ein kleines Gegenbeispiel an.

3) Lineare Abbildungen

Bestimme Kern und Bild der folgenden linearen Abbildungen vom \mathbb{R}^3 in den \mathbb{R}^3 :

$$F(x, z, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad G(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ x + z \end{pmatrix}, \quad H(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ -z - 2x \end{pmatrix}.$$

4) Multiple Choice

Die Multiple Choice Aufgaben können online auf echo.ethz.ch gelöst werden.