

## Serie 7

### 1) Kern und Bild

Bestimme Basen von Kern und Bild der linearen Abbildung

$$F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ x+y \\ y+z \\ z+t \end{pmatrix}$$

sowie der geschachtelten Abbildung  $F^{(2)}(x) = F(F(x))$ . Stelle die Abbildungen dazu in der Form  $F(x) = Ax$ ,  $F^{(2)}(x) = Bx$  für Matrizen  $A, B$  dar.

### 2) Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Die folgenden Mengen sind Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} & , & \quad L_2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : xy + z = -1\} \\ L_3 &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\} & , & \quad L_4 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2z\} \\ L_5 &= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x < y < z\} & , & \quad L_6 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = 1, y = 2\} \\ L_7 &= L_4 \setminus L_3 & , & \quad L_8 = L_4 \cap L_3 . \end{aligned}$$

- (a) Entscheide, welche der Teilmengen Unterräume des  $\mathbb{R}^3$  sind.  
Falls ja gib eine Basis des Unterraums an, ansonsten gib eine kurze Begründung warum die Menge kein Unterraum ist.
- (b) Entscheide, welche der Teilmengen Lösungsmengen eines linearen Gleichungssystems sind.  
Falls ja drücke die Menge durch Orts- und Richtungsvektoren aus.

Verwende für (b), dass eine Menge Lösungsmenge ist wenn man sie in der Form  $L = x^{(0)} + \text{span}\{x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\}$  schreiben kann, wobei  $x^{(0)}$  ein Ortsvektor, und  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  Richtungsvektoren sind.

### 3) Ausgleichsrechnung

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimme Kern und Bild der Matrix  $A$ .
- (b) Bestimme Kern und Bild der Matrix  $A^T \cdot A$ .
- (c) Berechne die Menge aller optimalen Näherungslösungen für das System  $Ax = b$ .
- (d) Zeige durch Rechnung, dass alle Bilder dieser Menge unter der Abbildung  $x \mapsto Ax$  den gleichen Abstand zum Zielvektor  $b$  haben. Berechne den Abstand, d.h. der Fehler den man macht wenn man mit der Näherungslösung anstatt einer tatsächlichen Lösung des Systems  $Ax = b$  arbeitet.

### 4) Eine Eigenschaft von orthogonalen Matrizen

Zeige durch Rechnung die folgende kleine Hilfsaussage für eine Matrix  $A$  vom Format  $n \times n$ : wenn  $A$  eine orthogonale Matrix ist (also  $A^T = A^{-1}$ ), dann haben  $Ax$  und  $x$  stets die gleiche Länge. Verwende dazu, dass  $\|x\|^2 = x^T \cdot x$  ist, wenn man den Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  als Spaltenvektor nimmt.

### 5) Multiple Choice

Die Multiple Choice Aufgaben können online auf [echo.ethz.ch](http://echo.ethz.ch) gelöst werden.