# Musterlösung zur Prüfung Grundlagen der Mathematik II
# 20. August 2014

## LÖSUNG 1

(1) (a) Wir haben
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \alpha & \alpha & -\alpha \end{vmatrix} = 4\alpha.$$
Die drei gegebenen Vektoren bilden also eine Basis genau dann wenn $\alpha \neq 0$.

(b) Es gilt
$$v \cdot w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \\ -3\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 8 \\ 4 \\ -\alpha \end{pmatrix} = 3\alpha^2 - 12.$$
Folglich sind $v$ und $w$ genau dann orthogonal wenn $\alpha \in \{\pm 2\}$.

(c) Es ist einfach zu sehen, dass
$$\mathrm{Det}(A), \mathrm{Det}(B), \mathrm{Det}(C) = 0,$$
also insbesondere $\mathrm{Det}(ABC) = 0$.

(2) (a) $\dim(\mathrm{Bild}(M)) = 3$.

(b) $\dim(\mathrm{Kern}(M)) = 5 - 3 = 2$.

(c) Die Antwort ist ja, z.B. mit $v = 0$ und $w \in \mathrm{Kern}(M) \setminus \{0\}$.

## LÖSUNG 2

(1) (a) Es gilt
$$\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1.$$
Das heisst, $A$ ist singulär genau dann wenn $\alpha \in \{\pm 1\}$.

(b) Die Eigenwerte von $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind 0 und 2.

(c) Es gilt $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(d) Es gilt $\mathrm{Bild}(B) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(2) (a) Die Eigenwerte von $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sind 4, $-2$ und 0.

(b) Es gilt $\mathrm{Kern}(M) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

# LÖSUNG 3

(1) (a) Aus der Tabelle folgt, dass 3% der 5-jährigen Mädchen sind kleiner als etwa 100.5cm. Ein auf 5% genaues Intervall für "kleiner als 100cm" wäre dann: 0-5%.

(b) In der Tabelle sieht man, dass 15% der 5-jährigen Mädchen sind grösser als etwa 114.5cm. Ein auf 5% genaues Intervall für "grösser als 115cm" wäre dann: 10-15%.

(2) Sei die Zufallsvariable $G$ = "Körpergrösse von 5-jährigen Mädchen ". Aus der Aufgabenstellung wissen wir dass $G \sim \mathcal{N}(109.4, 4.8^2)$. Sei jetzt $g$ die Grösse der Tochter des Dozenten, es gilt $F_G(g) = 0.75$ nach der Aufgabenstellung. Aus der Tabelle folgt approximativ $F_G(114.5) = 0.85$ und $F_G(109.5) = 0.5$. Ein mögliches Intervall der Länge 3 für die Grösse der Tochter des Dozenten ist also $[111, 114]$ wobei $F_G(111) = 0.63$ und $F_G(111) = 0.83$.

(3) (a) Es gilt $X \sim B(n, p_0)$ wobei $n = 8$ und aus $(1 - p_0)^8 = P[X = 0] = 0.1$ bekommt man

$$p_0 = 1 - 0.1^{1/8} = 0.25.$$

(b) Die erwartete Anzahl an grössere Mädchen ist $E[X] = np_0 = 8 \cdot 0.25 = 2$.

(c) i. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Tochter des Dozenten am grössten ist: $P[X = 0] = 0.1$.

ii. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Tochter des Dozenten am kleinsten ist: $P[X = 8] = 0.000$.

iii. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Tochter des Dozenten mit der Körpergrösse genau in der Mitte der Klasse liegt: $P[X = 4] = 0.087$.

iv. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Tochter des Dozenten grösser oder gleich der Median-Körpergrösse der Klasse ist: $P[X \leq 4] = 0.100 + 0.267 + 0.311 + 0.208 + 0.087 = 0.973$.

(4) Wir wählen einen Binomialtest. Wir testen die Nullhypothese $H_0 : p = p_0 = 0.25$ gegen der Alternative $H_A : p \neq 0.25$. Die Teststatistik ist gleich die binomialverteilte Zufallsvariable $X \sim B(8, 0.25)$ wobei $E[X] = np_0 = 2$. Die beobachtete Anzahl an Mädchen die grösser als die Tochter des Dozenten sind, ist gleich $x = 5$. Der p-Wert ist also

$$P = P[|X - E[X]| \geq x - E[X]] = P[|X - 2| \geq 3] = P[X \geq 5] + P[X \leq -1] = P[X \geq 5].$$

Aus der Tabelle folgt dann

$$P = P[X \geq 5] = 0.023 + 0.004 + 0.000 + 0.000 = 0.027.$$

Der p-Wert ist bei 2.7% strikt kleiner als das standarde 5%-Niveau und deswegen wird die Nullhypothese verworfen.

**Bemerkung von Dr. Dettling:** Für mich reicht es, wenn ein Student einfach $P(X \geq 5)$ berechnet, ohne weitere Angaben. Falls es Studenten geben sollte, welche diesen Wert noch verdoppeln (wg. Zweiseitigem Test), so sollten diese nicht zu stark, bzw. überhaupt nicht bestraft werden. Ich habe das in der Vorlesung nicht ganz im Detail klargemacht.

# LÖSUNG 4

(1) Die Teststatistik

$$T = \frac{\bar{X} - \hat{\mu}}{\widehat{\Sigma}_x/\sqrt{n}}$$

ist nach Annahme $t$-verteilt mit 10 Freiheitsgraden. Es gilt auf einer Seite

$$P[T \in [-q, q]] = P\left[\hat{\mu} \in \left[\bar{X} - q\frac{\widehat{\Sigma}_X}{\sqrt{n}}, \bar{X} + q\frac{\widehat{\Sigma}_X}{\sqrt{n}}\right]\right]$$

und auf der anderen Seite gilt $P[T \in [-q, q]] = 0.95$ genau dann wenn $P[T \leq q] = 0.975$ oder äquivalent $q = qt_{0.975;10} = 2.2$. Das heisst

$$\left[\bar{x} - qt_{0.975;10}\frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}, \bar{x} + qt_{0.975;10}\frac{\hat{\sigma}_X}{\sqrt{n}}\right] = \left[157.9 - 2.2\frac{8.7}{3.3}, 157.9 + 2.2\frac{8.7}{3.3}\right] = [152.1, 163.7]$$

ist ein 95%-Vetrauensintervall für die erwartete Folien-Festigkeit.(Siehe auch Stahels Buch Statistische Datenanalyse 9.3.a S.228 für die Definition des Vetrauensintervalls für den $t$-Test.)

(2) Es gilt

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\widehat{\sigma}_x/\sqrt{n}} = \frac{157.9 - 160}{8.7/3.3} \approx -0.8 \in [-2.2, 2.2] = [-qt_{0.975;10}, qt_{0.975;10}].$$

Die Nullhypothese wird folglich beibehalten.

**Bemerkung von Dr. Dettling:** In 4.(2) wird ja nach dem Wert der Teststatistik gefragt, sowie nach der Testentscheidung. Die Entscheidung kann man mit dem Intervall von 4.(1) fällen, für die Teststatistik muss man aber separat rechnen. Falls also jemand die Testentscheidung korrekt fällt und dies mit dem VI aus 4.(1) begründet, so kriegt er einfach 1 Punkt. Wenn zusätzlich noch die Teststatistik korrekt berechnet wurde gibt es den zweiten Punkt. Mir wäre es dann auch egal, wenn für die Testentscheidung mit dem VI und nicht mit der Teststatistik argumentiert wird.

(3) Nein, man darf aus der beibehaltenen Nullhypothese nicht folgern, dass sie richtig ist. Die formelle Schlussfolgerung lautet "die Nullhypothese wurde aufgrund der vorliegenden Daten beibehalten (bzw. konnte nicht verworfen werden) und könnte richtig sein".

(4) Der wesentlichste Grund für das Beibehalten (vorausgesetzt, dass das wahre $\mu < 160$ ist) entweder bei einer für den Unterschied zu kleinen Stichprobe zu finden.