Prüfung Grundlagen der Mathematik II

AUFGABE 1 [5 Punkte]

Jede Teilaufgabe ist ein Punkt Wert.

(A) Drucken Sie den Vektor $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ als reelle lineare Kombination der Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ aus.

Es gilt

$$\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} = (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

(B) Ist $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ Element der Bildmenge der Matrix $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}$. Antworten Sie mit Begründung.

Ja, $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ ist Element der Bildmenge der gegebenen Matrix, denn

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

(C) Was ist die Dimension des Kerns der Matrix $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$? Antworten Sie mit Begründung.

Die gegebene Matrix ist Element von $\mathbb{R}^{6\times 3}$ und die Dimension ihres Bildes ist gleich 3. Wegen der Formel

$$\text{Anzahl Spalten} = \text{Dimension vom Bild} + \text{Dimension vom Kern}$$

folgt also, dass das Kern null dimensional ist.

(D) Betrachten Sie folgende Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$:

$$U = \left\{\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\} \quad \text{und} \quad V = \left\{\alpha\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} : \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}.$$

Bestimmen Sie $\dim(U\cap V)$ mit Begründung.

Geometrisch stellen U und V zwei Ebenen durch den Ursprung im dreidimensionalen Raum dar. Das heisst, die Antwort besteht aus zwei Möglichkeiten:
entweder sind U und V gleich und der Durschnitt ist zweidimensional
oder der Durschnitt ist eindimensional.

Man sieht sofort, dass der Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, ein Element von V aber kein Element von U ist. Das heisst $\dim(U\cap V) = 1$.

(E) Finden Sie einen Vektor $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, der zu allen Vektoren im Untervektorraum

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} : x_1+x_2+x_3 = 0\right\}$$

von $\mathbb{R}^3$ orthogonal ist.

Die linke Seite der gegebenen Gleichung entspricht das Skalarprodukt mit dem Vektor $v := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Der Vektor v erfüllt also gerade die gewünschten Eigenschaften.

AUFGABE 2 [4 Punkte]

Jede Teilaufgabe ist ein Punkt Wert.

(A) Sei $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante der fünften Potenz M^5 von M.

Es gilt $\det(M) = 0$ und daraus folgt $\det(M^5) = \det(M)^5 = 0$.

(B) Finden sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ damit 3 ein Eigenwert der Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist.

Es gibt nur eine Möglichkeit und zwar $\alpha = 3$, die benötigte Begründung könnte über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $(\lambda - \alpha)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$ gehen.

(C) Bestimmen Sie den Eigenvektor der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ zur Eigenwert 5.

Es gilt

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Der Eigenvektor zum Eigenwert 5 ist also $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

AUFGABE 3: [4 Punkte]

Im zweiten Weltkrieg wurde London stark bombardiert. Um die Treffer zu erheben, wurde die Stadt in 576 kleine Gebiete von je einem Viertel Quadratkilometer aufgeteilt. Die Anzahl Treffer über einen bestimmten Zeitraum in jedem Gebiet wurde gezählt und ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Es gab insgesamt 537 Treffer.

Treffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8+
Gebiete	229	211	93	35	7	0	0	1	0

Wir interessieren uns für die Zufallsvariablen X_i = "Anzahl Treffer im Teilgebiet i ".

(a) [1 Punkt] Welche Gründe sprechen hier gegen die Verwendung einer Binomial-Verteilung für die Zufallsvariablen?
$\boxed{\text{1 Punkt:}}$ Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist nicht bekannt. Die Anzahl Einzelversuchen ist relativ gross, spricht also für eine Approximation mittels der Poisson Verteilung.

(b) [1 Punkt] Gehen Sie davon aus, dass die Zufallsvariablen X_i identisch verteilt sind. Sie sollen nun eine geeignete Poisson-Verteilung für die Zufallsvariablen X_i anpassen. Geben Sie den geschätzten Parameter $\hat{\lambda}$ der Verteilung an, ebenso wie auch den Erwartungswert und die Standardabweichung der so entstehenden Verteilung für X_i. Geben sie die Resultate als Brüche und nicht als Dezimalzahlen an.
$\boxed{\text{0.5 Punkte:}}$ $\hat{\lambda} = \frac{537}{576}$.
$\boxed{\text{0.5 Punkte:}}$ $\mathrm{E}[X_i] = \hat{\lambda} = \frac{537}{576}$ zusammen mit $\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)} = \sqrt{\hat{\lambda}} = \sqrt{\frac{537}{576}}$.

(c) [2 Punkte] Gehen sie an dieser Stelle davon aus, dass die Verteilung von X_i bzw. deren Parameter λ so ist, dass $\lambda = 0.9$ und $\exp(-\lambda) = 0.4$. Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gebiet mehr als 2 Treffer erhält.
$\boxed{\text{1 Punkt:}}$ Formulierung des Problems in Wahrscheinlichkeiten zusammen mit Verwendung von $\mathrm{P}[A^c] = 1 - \mathrm{P}[A]$ also für die Formel

$$\mathrm{P}[X_i > 2] = 1 - \mathrm{P}[X_i = 0] - \mathrm{P}[X_i = 1] - \mathrm{P}[X_i = 2].$$

$\boxed{\text{1 Punkt:}}$ Für das korrekte Endresultat, also mit $\mathrm{P}[X_i = k] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-0.9}0.9^k}{k!} \approx \frac{0.4 \cdot 0.9^k}{k!}$, hat man

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}[X_i > 2] &= 1 - \mathrm{P}[X_i = 0] - \mathrm{P}[X_i = 1] - \mathrm{P}[X_i = 2] \\
&= 1 - \tfrac{0.4}{1} - \tfrac{0.4 \cdot 0.9^1}{1} - \tfrac{0.4 \cdot 0.9^2}{2} \\
&= 1 - 0.4 - 0.36 - 0.162 \\
&= 1 - 0.922 \\
&= 0.078 \\
&= 7.8\%.
\end{aligned}$$

AUFGABE 4: [4 Punkte]

Nehmen wir an, dass für Laufbänder und Hometrainer in den letzten 6 Monaten die folgende Anzahl Ausrüstungsverkäufe und Serviceverträge zustande kamen:

	Laufband	Hometrainer
Total Verkäufe	144	100
Mit Servicevertag	48	50

Ein Servicevertrag kann nur zustande kommen, wenn auch Ausrüstung verkauft wurde. Folglich wurden z.B. 96 Laufbänder ohne Servicevertrag verkauft.

(a) [2 Punkte] Schätzen sie den Anteil der Verkäufe mit Servicevertrag sowohl für Laufbänder als auch für Hometrainer und geben sie jeweils das entsprechende 95%-Vertrauensintervall mit Hilfe der Faustregel an.
Zahlenhinweis: Benutzen Sie die Näherungen $\frac{\sqrt{2}}{36} \approx 0.04$. Rechnen Sie mit 2 anstelle von 1.96. Genauigkeit wird auf 2 Stellen nach dem Komma gesetzt.
1 Punkt: Für die korrekte Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $\hat{p}_1 = \frac{48}{144} = \frac{1}{3}$ und $\hat{p}_2 = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.
1 Punkt: Für die korrekte Berechnung der zwei Intervallen

$$I_1 \sim \hat{p}_1 \pm 1.96\sqrt{\tfrac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}} \approx \tfrac{1}{3} \pm 2\sqrt{\tfrac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})}{144}} = \tfrac{1}{3} \pm 2\tfrac{\sqrt{2}}{36} \approx 0.33 \pm 2 \cdot 0.04 = 0.33 \pm 0.08 \sim [0.25, 0.41].$$

und

$$I_2 \sim \hat{p}_1 \pm 1.96\sqrt{\tfrac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \approx \tfrac{1}{2} \pm 2\sqrt{\tfrac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{100}} = \tfrac{1}{2} \pm 2\tfrac{1}{20} = 0.5 \pm 0.1 \sim [0.40, 0.60].$$

(b) [2 Punkte] Sind die beiden Anteile von Verkäufen mit Servicevertrag für Laufbänder und Hometrainer signifikant unterschiedlich? Beantworten sie die folgenden Fragen:

(i) wie lautet die Nullhypothese für den Test, den man hier durchführen soll?
0.5 Punkte: $\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2$.

(ii) führen sie einen Ad-Hoc-Test mit dem Resultat aus (a) durch und beantworten sie, ob es einen signifikanten Unterschied gibt.
0.5 Punkte: Der Test besteht daraus, ob der Durschnitt $I_1 \cap I_2$ nicht leer ist. In unserem Fall, folgt aus (a), dass $I_1 = [0.25, 0.41]$ und $I_2 = [0.40, 0.60]$. Der Durschnitt $I_1 \cap I_2$ ist also nicht leer und der Unterschied ist nicht signifikant.

(iii) Argumentieren Sie, ob und warum die Faustregel hier ein genügend genaues Resultat für das Vertrauensintervall liefert.
0.5 Punkte: Es gilt

$$n_1\hat{p}_1(1-\hat{p}_1) = 144 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3} = 32 > 10$$

und

$$n_2\hat{p}_2(1-\hat{p}_2) = 100 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 25 > 10.$$

(iv) Was bedeutet ein p-Wert von 0.005 bei diesem Beispiel (max. 2 Sätze)?
0.5 Punkte: Ein p-Wert von nur 0.005 also 0.5% ist deutlich unter dem standarden 5%-Niveau. Das heisst, die Beobachtungen erlauben uns nicht, die Nullhypothese zu bestätigen.