Prüfung Grundlagen der Mathematik II
14. August 2017

AUFGABE 1 (8 Punkte)

(a) Die augmentierte Matrix ist $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & \alpha^2+\alpha \\ 1 & 0 & -2 & 6 & \alpha \end{array}\right)$. Durch umformen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & \alpha^2+\alpha \\ 1 & 0 & -2 & 6 & \alpha \end{array}\right) \overset{\substack{\text{I}-\text{II} \\ \text{III}-2\text{II} \\ \text{V}-\text{II}}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|r} 0 & 1 & 3 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & \alpha^2+\alpha-4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & \alpha-2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & \alpha^2+\alpha-4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & \alpha-2 \end{array}\right) \overset{\text{III}-2\text{II}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & \alpha^2+\alpha-2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & \alpha-2 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{IV}-\text{III}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|r} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & \alpha^2+\alpha-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^2 \end{array}\right).$$

(b) Falls $\alpha \neq 0$, so hat das Gleichungssystem keine Lösung, da der Rang der augmentierten Matrix grösser ist als der Rang der Matrix A.

Falls $\alpha = 0$ so hat das Lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, da der Kern von A nicht trivial ist.

(c) Die Matrix A hat Rang 3. Somit ist der Kern von A ein-dimensional. Der Kern von A wird zum Beispiel von folgenden Vektor aufgespannt: $v = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(d) Wir wählen den freien Parameter $2t := x_4$ und erhalten die Gleichung: $-2x_3 + 6t = -2$. Auflösen nach x_3 ergibt: $x_3 = 1 + 3t$. Die zweite Gleichung lautet $x_2 + 3x_3 - 6t = -1$. Einsetzen von x_3 und auflösen nach x_2 ergibt: $x_2 = -4 - 3t$. Aus der letzte Gleichung erhalten wir $x_1 = 2 - 6t$. Der Lösungsraum von $Ax = b$ ist somit

$$\mathbb{L} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \}.$$

(e) Nein, denn der Nullvektor ist nicht in $\mathbb{L}$ enthalten.

AUFGABE 2 (7 Punkte)

Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$.

(a) Die Rechenregeln für Determinanten von Matrizen zeigt, dass $\det(M) = \det(\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}) \det(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix})$. Dies sieht man zum Beispiel mit einer Entwicklung nach der dritten Spalte. Somit gilt

$$\det(M) = \det(\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}) \det(\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}) = \left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right) \left(a^2 + b^2\right) = a^2 + b^2.$$

(b) Wir bemerken, dass

$$M^T = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

und $MM^T = Id$. Falls $det(M) = 1$ so ist M ortogonal, da $MM^T = M^T M = Id$. Es sind insbesondere auch die Matrizen $\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 = 1$ orthogonal.

(c) Wir bemerken, dass

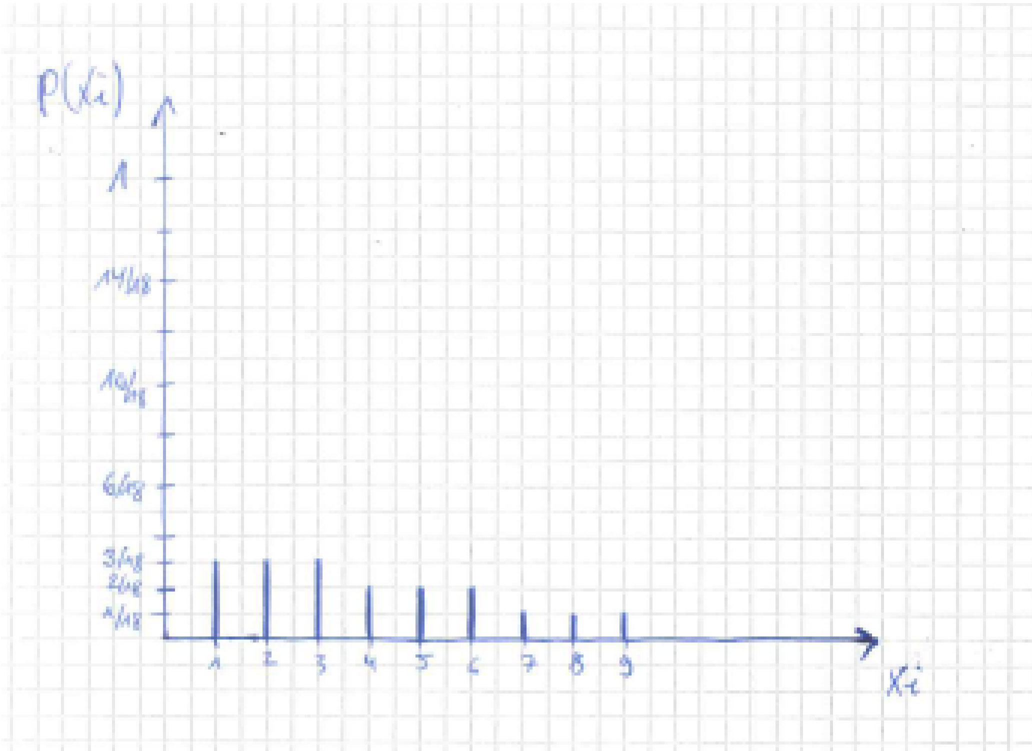
$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \cos(\phi) - \lambda & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) - \lambda \end{pmatrix} &= (\cos(\phi) - \lambda)^2 + \sin^2(\phi) \\ &= \cos^2(\phi) - 2\lambda \cos(\phi) + \lambda^2 + \sin^2(\phi) \\ &= 1 - 2\lambda \cos(\phi) + \lambda^2. \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind $\lambda_{1,2} = \frac{2\cos(\phi) \pm \sqrt{4\cos^2(\phi) - 4}}{2} = \cos(\phi) \pm \sqrt{\cos^2(\phi) - 1}$. Falls $\phi \neq k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, so hat das Polynom keine (reellen) Nullstelle und somit hat die Matrix keine (reellen) Eigenwerte. Falls $\phi = \pi + k2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, so hat A die Eigenwerte $-1, -1$. Falls $\phi = k2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, so hat A die Eigenwerte $1, 1$.

(d) Für $a = 2, b = 0, \phi = \pi$ lautet die Matrix $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Die Eigenwerte sind somit $-1, -1, 1, 2, 2$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dies ist bereits eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren zu M.

AUFGABE 3 (8 Punkte)

(a) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X_i ist die gleiche füer alle $i = 1, \ldots, 4$. Eine Skizze dieser Verteilung sieht wie folgt aus.



(b) $P(X_i > 1) = 1 - P(X_i = 1) = 1 - \frac{3}{18} = \frac{5}{6}$. $P(X_i = 5) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$. $P(7 \leq X_i \leq 8) = P(X_i = 7, 8) = 2 \frac{1/18}{=} \frac{1}{9}$.

(c) Fúr alle $i = 1, 2, 3, 4$ gilt $E[X_i] = \sum_{k=1,\ldots,9} P(X_i = k)k = \frac{3}{18}(1+2+3) + \frac{2}{18}(4+5+6) + \frac{1}{18}(7+8+9) = \frac{72}{18} = 4$.

(d) Wir sehen dass die Zufallsvariable Z durch $X_1 + 3X_2 + 3X_3 + X_4$ gegeben ist. Da $1 \leq X_i \leq 9$ nimmt Z mindestens den Wert 8 und maximal den Wert 72 an. Alle Werte dazwischen können ebenfalls angenommen werden. Somit ist $\Omega = \{z \in \mathbb{Z} | 8 \leq z \leq 72\}$.

(e) Wegen der Linearität des Erwartungswertes ist

$$E[Z] = E[X_1] + 3E[X_2] + 3E[X_3] + E[X_4] = 8 \cdot 4 = 32.$$

(f) ?

AUFGABE 4 (7 Punkte)

(a) Fï 2015: Das 95%-Vertrauensinterval hat die Form $15 \pm qt_{0,975,8} \frac{2.1}{\sqrt{9}} \cong 15 \pm 2\frac{2.1}{3} \cong 15 \pm 1.3$. Fï 2016 erhalten wir $13.5 \pm qt_{0,975,8} \frac{1.5}{\sqrt{9}} \cong 13.5 \pm 2\frac{1.5}{\sqrt{9}} = 13.5 \pm 1$.

(b) (i) Die Nullhypothese lautet $\mu_{2015} = \mu_{2016}$.

(ii) Die Teststatistik hat eine t-Verteilung in $n_1 + n_2 - 2 = 9 + 9 - 2 = 16$ Freiheitsgraden.

(iii) Da $qt_{0,975,8} \cong 2$ wird die Teststatistik verworfen falls $T \in \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$.

(iv) $T = \frac{\mu_{2\hat{0}15} - \mu_{2\hat{0}16}}{S_p \sqrt{\frac{n_{2015} + n_{2016}}{n_{2015} n_{2016}}}} = \frac{15 - 13.5}{1.8\sqrt{\frac{18}{81}}} = \frac{1.5 \cdot 9}{1.8 \cdot \sqrt{18}} < \frac{1.5 \cdot 9}{1.8 \cdot \sqrt{16}} = \frac{13.5}{1.8 \cdot 4} = \frac{13.5}{7.2} << 2$. Die Nullhypothese wird also angenommen.

(v) Da $-2 << T << 2$ wird die Nullhypothese angenommen und somit ist der p-Wert grösser als 0.05.