Dr. M. Dettling

Grundlagen der Mathematik II
D-CHAB

Name:

Legi-Nr.:

Studiengang:

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 90 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Beliebige schriftliche Hilfsmittel, Wörterbücher. Keine Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Lassen Sie auf jedem Blatt einen Rand für die Korrektur. **Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.**
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.
- Maximalpunktzahl: 30 Punkte.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
Total		

Vollständigkeit	
Note	

AUFGABE 1 (7 Punkte)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$, sei die Matrix A_α gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A_α in Abhängigkeit von α.

(b) Berechnen Sie $\det A_\alpha$ und vergleichen Sie die Determinante mit dem Produkt der Eigenwerte (inkl. Vielfachheiten).

(c) Bestimmen Sie den Rang von A_α in Abhängigkeit von α.

(d) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A_{-2} (d.h. $\alpha = -2$).

(e) Hat die Matrix A_{-2} eine Eigenbasis?

Lösung.

(a) Das charakteristiche Polynom ist $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(1-\lambda-\alpha)(1-\lambda+\alpha)$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1-\alpha$ und $\lambda_3 = 1+\alpha$. [2P]

(b) $\det(A_\alpha) = 1-\alpha^2 = (1-\alpha)(1+\alpha) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$. [1P]

(c) Für $\alpha \neq \pm 1$ ist $Rang(A_\alpha) = 4$. Die Matrizen A_{-1} und A_1 haben drei linear unabhängige Zeilen, d.h. Rang 3. [1P]

(d) Die Eigenvektoren sind (unabhängig von α) [2P]

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(e) Die Matrix hat keine Eigenbasis, da der (algebraisch) zweifache Eigenwert 1 nur eindimensionalen Eigenraum hat. [1P]

AUFGABE 2 (10 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $b_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ \beta \end{pmatrix}$.

(a) Wieviele Lösungen hat das Gleichungssystem $Ax = 0$? Bestimmen Sie die Dimension der Lösungmenge.

(b) Für welche Werte von β hat das System $Ax = b$ mindestens eine Lösung?

(c) Für $\beta = 4$, berechnen Sie die Menge M aller optimalen Näherungslösungen für das System $Ax = b_4$. Ist M ein Vektorraum?

(d) Wählen Sie eine beliebige Näherungslösung $x_0 \in M$. Zeigen Sie, dass $Ax_0 - b_4$ orthogonal zu allen Vektoren im $Bild(A)$ ist, und berechnen Sie den Fehler $|Ax_0 - b_4|$.

(e) Seien x_0 und x_1 in M. Bestimmen Sie $A(x_0 - x_1)$.

—— **BITTE WENDEN** ——

Lösung

(a) Das System hat unendlich viele Löesungen. [0.5P]
Die Matrix hat Rang 2, d.h. das System $Ax = 0$ hat effektiv 2 Gleichungen und 3 Unbekannten. Die Löesungsmenge hat Dimension 1. [1P].

(b) Durch Reihenumformungen der augmentierten Matrix erhalten wir

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Das System hat eine Lösung genau dann, wann $\beta = \frac{1}{3}$. Sonst ist die letzte Gleichung im Widerspruch mit der ersten. [2P]

(c) Die Näherungslösungen sind $x = x_0 + ty$, wobei $A_y = 0$, x_0 ist eine Lösung des Systems $A^T Ax = A^T b_4$ und $t \in \mathbb{R}$ ist beliebig.

Das System $A^T Ax = A^T b_4$ ist

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -3 \\ -4 & 7 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung ist $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Folglich ist

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}. \quad [3P]$$

M ist kein Vektorraum, z.B. $0 \notin M$. [0.5P]

(d) Die 'Abweichung' $Ax_0 - b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu den Zeilen von A, d.h. zu allen Vektoren im $Bild(A)$. [1.5P]

$|Ax_0 - b_4| = \sqrt{11}$. [0.5P]

(e) $A(x_0 - x_1) = A(ty)$ für ein $t \in \mathbb{R}$, also $A(x_0 - x_1) = 0$. [1P]

AUFGABE 3 (8 Punkte)

Die Zufallsvariable X beschreibt, wie oft Thomas an einem Tag seinen Instagram-Feed checkt. Es ist bekannt, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von:

30% 0 Zugriffe hat,
25% 2 Zugriffe hat,
25% 4 Zugriffe hat,
10% 5 Zugriffe hat,
10% 10 Zugriffe hat.

Lösen Sie mit diesen Angaben nun die folgenden Aufgaben.

(a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung (bzw. die diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion) der Zufallsvariablen grafisch dar. Es darf sich dabei um eine Skizze handeln, achten Sie jedoch auf eine massstäbliche Abbildung und beschriften Sie die Achsen vollständig und korrekt/

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 1), P(X \geq 5)$ und $P(X \in \{0, 4, 8\})$.

(c) Berechnen Sie Erwartungswert $E[X]$ und Varianz $Var(X)$.

Wir betrachten nun die Zufallsvariable Z. Diese drückt aus, wie oft Thomas seinen Instagram-Feed während einem ganzen Jahr (d.h. 365 Tagen) checkt.
Hinweis. wir gehen davon aus, dass die Zugriffe an den verschiedenen Tagen stochastisch unabhängig sind.

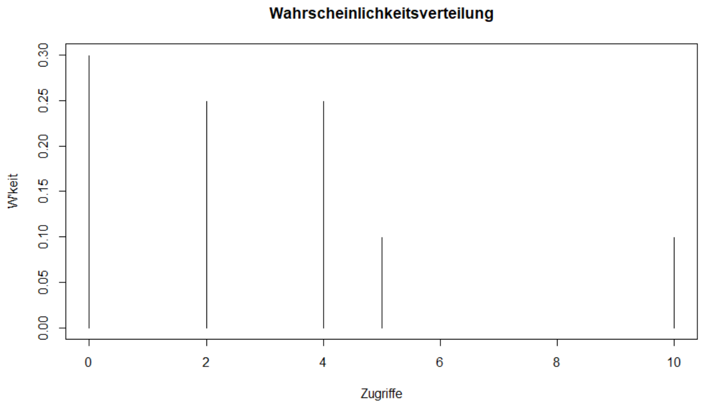
(d) Geben Sie den kleinsten und den grössten Wert aus dem Wertebereich (bzw. den Wahrscheinlichkeitsraum) von Z an.

(e) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von Z.
Hinweis. Falls Sie die Teilaufgabe (c) nicht lösen konnten, verwenden Sie $E[X] = 4$ und $Var(X) = 8$. Falls Sie bei (c) die Lösungen gefunden haben, dürfen Sie auch mit den richtigen Werten weiterrechnen.

(f) Geben Sie an, ob die Wahrscheinlichkeit, dass Thomas im Laufe eines Jahres mehr als 1150 Zugriffe macht, eher bei 16%, 2.5% oder 0.15% liegt. Geben Sie eine quantitative Begründung für ihre Antwort an.
Hinweis. $\sqrt{3000} \approx 55$.

Lösung.

(a) [2P]



(b) $P(X = 1) = 0$, $P(X \geq 5) = 0.2$, $P(X \in \{0, 4, 8\}) = 0.55$. [1P]

(c) $E[X] = 3$, $Var(X) = 8.5$ [2P]

(d) 0 und 3650. [0.5P]

(e) $E[Z] = 3 \cdot 365 = 1095$, $Var(Z) = 365 \cdot 8.5 = 3102.5$. [1P]
(Mit alternativen Werten bekommt man $E(Z) = 1460$ und $Var(Z) = 2920$.)

(f) Die Wahrscheinlichkeit liegt bei ungefähr 16%. Begründung: der Wert 1150 liegt eine Standardabweichung oberhalb vom Mittelwert. Bei der Normalverteilung (welche hier genähert gilt) liegen rund 16% der Wahrscheinlichkeit um mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert entfernt. [1.5P]

—— **BITTE WENDEN** ——

AUFGABE 4 (5 Punkte)

Bei zwei verschiedenen Mineralöl-Unternehmen A und B wurde der Anteil an Bioethanol im Treibstoff untersucht. Beim einen Unternehmen wurden 25 Proben genommen, beim anderen 16. Es geht darum festzustellen, ob es zwischen den beiden Unternehmen signifikante Unterschiede im Bioethanol-Anteil gibt. Die Kenngrössen sind wie folgt.

$$A : n_A = 25, \hat{\mu}_A = 3\%, \hat{\sigma}_A = s_A = 0.5\%;$$
$$B : n_B = 16, \hat{\mu}_B = 5\%, \hat{\sigma}_B = s_B = 1.0\%.$$

Lösen Sie mit diesen Angaben die folgenden Aufgaben.

(a) Welche Aussage ist zutreffend, wenn die Anzahl Proben beim Unternehmen A auf 36 erhöht wird: "der Vergleich der beiden Unternehmen ist genauer bzw. aussagekräftiger, weil mehr Beobachtungen vorliegen oder "der Vergleich der beiden Unternehmen ist schlechter bzw. weniger aussagekräftig, weil der Unterschied in der Anzahl Messungen noch grösser ist"? Entscheiden Sie sich für eine der beiden Aussagen und antworten Sie mit kurzer Begründung (max. 1-2 Sätze).

(b) Geben Sie für A und B je ein approximatives 95%-Vertrauensintervall für den erwarteten Bioethanolgehalt an. Lässt sich bereits eine Aussage machen, ob zwischen den beiden Firmen ein signifikanter Unterschied beim Bioethanolgehalt besteht?

(c) Wir gehen davon aus, dass in obigem Setup ein 2-Stichproben-t-Test ausgeführt wird. Beantworten Sie die folgenden Aussagen mit richtig oder falsch:

(i) der Wert der Teststatistik liegt im Annahmebereich.

(ii) der p-Wert ist kleiner als 0.05.

(iii) werden n_A und n_B grösser (Rest bleibt gleich), so wird der p-Wert grösser.

Lösung

(a) Der Vergleich wird aussagekräftiger, weil mehr Beobachtungen vorliegen. Es ist beim statistischen Testen keine Voraussetzung, dass die beiden Stichproben gleich gross sind. [1P]

(b) $A : 3 \pm 2 \cdot \frac{0.5}{\sqrt{25}} = 3 \pm 0.2$,
$B : 5 \pm 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{16}} = 5 \pm 0.5$. [1P]
Die beiden Vertrauensintervalle überschneiden sich nicht. Wir können daher davon ausgehen, dass ein signifikanter Unterschied besteht. [1P]

(c) Falsch. Der Annahmebereich ist c. $T \in [-2, 2]$, und wir haben $S_p \approx 0.75$, $T \approx -\frac{2}{0.75 \cdot \sqrt{0,5}} <$ -2. [1P]

(d) Richtig, weil T deutlich ausserhalb von $[-2, 2]$ liegt. [1P]

(e) Falsch. Mit mehreren Stichproben wird die Hypothese '$\mu_A = \mu_B$' deutlicher verworfen (oder, die Vertrauensintervalle werden enger) [1P].