

Grundlagen der Mathematik II MUSTERLÖSUNG 4. Februar 2015

AUFGABE 1: [5 Punkte]

Seien $M, L \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ zwei Matrizen gegeben durch

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei dazu noch $I \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ die Identitätsmatrix.

(a) [1 Punkt]

$$M^4 = L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) [2 Punkte]

$$(I + M)^4 = I + 4M + 6M^2 + 4M^3 + M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) [1 Punkt]

$$(I + L)(I - L) = I - L^2 = I.$$

(d) [1 Punkt] Wegen (c), man hat $(I + L)^{-1} = I - L$.

AUFGABE 2: [2 Punkte]

Sei $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ eine Matrix, gegeben durch

$$Q := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) [1 Punkt] Die Dimension des Bildes von Q ist 4.

(b) [1 Punkt] Die Dimension des Kerns von Q ist $5 - 4 = 1$.

AUFGABE 3: [4 Punkte]

Seien $R, S \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ zwei Matrizen gegeben durch

$$R := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) [2 Punkte] Die Eigenwerten von der Matrix R sind $\{1, 2, 3\}$ (zu den Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)
- (b) [2 Punkte] Die Eigenwerten von der Matrix S sind $\{-1, 1, 3\}$. Die entsprechenden Eigenvektoren.
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$

AUFGABE 4: Gubrist-Tunnel [5 Punkte]

Der Gubrist-Tunnel ist chronisch überlastet. In den Spitzenzeiten frequentieren pro Fahrtrichtung bis zu 4800 Autos diese Verkehrsachse. Die Strasse ist zweispurig, also können wir von durchschnittlich 2400 Autos pro Spur und Stunde ausgehen. Beantworten sie nun mit dieser Angabe die folgenden Fragen:

- (a) [1 Punkt] Die zu den Spitzenzeiten mittlere (d.h. durchschnittliche) Wartezeit zwischen zwei Fahrzeugen ist gleich

$$\frac{3600}{2400} = 1.5 \text{ Sekunden.}$$

- (b) [1 Punkt] Als Zeiteinheit wählen wir am einfachsten eine Sekunde. Der Parameter ist dann der Kehrwert der mittleren Wartezeit, also gilt $X \sim \text{Exp}(\frac{1}{1.5})$.

- (c) [3 Punkte] Wir bestimmen mit der in (b) angepassten Exponentialverteilung die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden, in Sekunden angegebenen Wartezeiten. Wir geben die Formel und das Resultat an:

- (i) $P[X \leq 0.5] = F(0.5) = 0.28,$
(ii) $P[1 < X \leq 3] = F(3) - F(1) = 0.86 - 0.49 = 0.37,$
(iii) $P[X > 5] = 1 - F(5) = 1 - 0.96 = 0.04.$

Hinweis: Die kumulative Verteilungsfunktion ist hier $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, wobei:

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
$F(x)$	0.00	0.28	0.49	0.63	0.74	0.81	0.86	0.90	0.93	0.95	0.96	0.97	0.98

AUFGABE 5: Kreuzbandriss [4 Punkte]

Die Dynamische Intraligamentäre Stabilisierung (DIS) ist ein neues Verfahren zur Operation von Kreuzbandrissen. Dabei wird nicht wie beim üblichen Verfahren eine Spendersehne aus dem eigenen Bein eingesetzt, sondern das gerissene Kreuzband so stabilisiert, dass es zur Spontanheilung kommt. Man erhofft sich, dass die Heilung dank DIS schneller voranschreitet und die Kniegelenksfunktion langfristig besser ist.

In einer Studie wurde 9 Patienten mit DIS-Technik operiert und zur Zufriedenheit befragt. Dabei waren 8 Patienten zufrieden und 1 unzufrieden. Von der konventionellen OP-Technik ist bekannt, dass nur 51% der Patienten zufrieden sind. Untersuchen sie mit einem geeigneten statistischen Test, ob der Anteil an zufriedenen Patienten bei der DIS-Technik signifikant von 51% abweicht.

Wir betrachten nun die Zufallsvariable $X :=$ "Anzahl zufriedene Patienten von 9 nach DIS". X hat eine Binomialverteilung gegeben durch

Für eine Zufallsvariable $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ wobei $n = 9$ und $p = 0.51$ sind die Wahrscheinlichkeiten $P[Y = k]$ gegeben durch:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P[X = k]$	0.002	0.015	0.064	0.154	0.241	0.251	0.174	0.078	0.020	0.002

Untersuchen die mit einem geeigneten statistischen Test, ob der Anteil an zufriedenen Patienten bei der DIS-Technik signifikant abweicht.

- (a) [1 Punkt] Die Nullhypothese lautet $H_0 : p = 0.51$.
- (b) [1 Punkt] Wir bestimmen aus der Grafik der Verteilung von X , Annahme- und Verwerfungsbereich. Der Verwerfungsbereich umfasst auf beiden Seiten maximal 2.5% der Wahrscheinlichkeit, somit ergibt er sich als $\{0, 1\} \cup \{8, 9\}$. Der Annahmebereich ist sein Komplement, also $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- (c) [1 Punkt] Der p-Wert ist

$$P[|X - 4.59| \geq 3.41] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 8] + P[X = 9] = 0.039.$$

- (d) [1 Punkt] Die Nullhypothese wird (knapp) verworfen. Gemäss der Studie sind Patienten nach einer DIS-Operation signifikant zufriedener.