1a)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 6 & 2 & 4 \\ -1 & -3 & -1 & -0 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 1 & \alpha \\ -2 & -6 & -2 & -0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \begin{array}{l} ④ - 2\cdot ② \\ ③ - ② \\ ① \leftrightarrow ② \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & 3 \\ & -3 & +4 & +1 & -0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & \alpha-2 \\ & +3 & -4 & -1 & +0 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \begin{array}{l} ③ - ② \\ ④ + ② \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-2 \end{array}\right)$$

1b) <u>Falls $\alpha \neq 2$</u>, hat das Gleichungssystem keine Lösung, da der Rang der augmentierten Matrix grösser ist als der Rang von A

<u>Falls $\alpha = 2$</u>, hat GLS ∞-viele Lösungen, da $\ker A \neq \{0\}$.

1c) $\ker(A)$ hat Dimension 1.

$$\ker(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1/3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

1d) <u>$\alpha = 2$</u>
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- $\underline{x_4 = t}$, $t \in \mathbb{R}$

  $9x_3 + 3t = 3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t}}$

- $3x_2 - 4x_3 - x_4 = 3x_2 - 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t\right) - t = 0$

  $\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}t + t\right) = \underline{\underline{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}t}}$

$$\cdot \quad x_1 + 3x_2 + x_3 = \underbrace{x_1 + 3\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{9}t\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}t\right)} = 1$$

$$= x_1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}t$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 1 - \frac{5}{3} + \frac{2}{3}t = \underline{\underline{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}t}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/9 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/9 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad L = \left\{ \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/9 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/9 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

1e) Falls $\vec{b} = 0$ ist die Lösungsmenge ein VR, sonst nicht.
Damit die Lösungsmenge ein VR ist muss sie $\vec{0}$ enthalten.
Dies ist nur der Fall, wenn $\vec{b} = 0$

2.a) $JA = \begin{pmatrix} 0 & Id_3 \\ Id_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & * \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} A_2 & * \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 9 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & 0 & 8 \\ \hline & & & 5 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 4 & 3 \\ & & & 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

2b)

$$\det(J) = \det \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir tauschen 3×3-mal die Spalten um die Matrix Id_6 zu erhalten.

Somit ist $\det(J) = (-1)^{3\times 3} \cdot \det(Id_3)$

$$= (-1)^9 \cdot 1 = -1.$$

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(J^{-1} J A) = \mathrm{Det}(J^{-1})\,\mathrm{Det}(JA)$$
$$= -\mathrm{Det}(JA).$$

$\mathrm{Det}(JA)$ kann einfach mit Gauss berechnet werden.
zB. 6 Zeile − 5 Zeile ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 9 & & * & \\ 0 & 2 & 7 & & & \\ 0 & 0 & 3 & & & \\ \hline & & & 5 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 4 & 3 \\ & & & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

und diese Matrix hat Determinante

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot (-4)$

$= -480.$

Man sieht sofort, dass $\mathrm{Det}(JA) = \mathrm{Det}(A_1)\,\mathrm{Det}(A_2)$,

da JA eine Block-diagonal Matrix ist.

Mit der obigen Rechnung folgt

$$\mathrm{Det}(A) = -\mathrm{Det}(JA) = -(-480) = 480$$

2c) Mit Gauss gilt

$$JA \sim \left(\begin{array}{c|c} A_2 & * \\ \hline 0 & \begin{matrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Somit hat JA die EW $1, 2, 3, 5, 4, -4$.
(je Vielfachheit 1)
Insbesondere hat JA 6 verschiedene EW und ist
somit diagonalisierbar in $\mathbb{R}^6$
Es gibt also eine Basis aus EV zu JA.

2d) $F^2 + F$ hat EW -1

$\Rightarrow \exists\, x \neq 0 : (F^2 + F)(x) = -x$

$\Rightarrow F(F^2 + F)(x) = (F^3 + F^2)(x) = -F(x)$

$\Rightarrow F^3(x) = (-F - F^2)(x) = x$

$\Rightarrow F^3$ hat EW 1

GdM 2: Aufgaben Statistik Winter 2018

Marcel Dettling, 18.12.2017

Aufgabe 1

Als «Bieridee» wird unter Kollegen ein Fitnesstest durchgeführt. Es geht dabei um die Anzahl Klimmzüge, welche man(n) komplettieren kann. Es ergeben sich dabei die folgenden Resultate:

0, 12, 7, 4, 0, 8, 14, 2, 6, 7

Beantworten sie die folgenden Fragen:

a) Geben sie den Wertebereich für die Zufallsvariable $X =$ «Anzahl komplettierte Klimmzüge» an. Handelt es sich um eine diskrete oder eine stetige Zufallsvariable? (1P)

Diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich $\{0,1,2,3,...,+\infty\}$.

b) Welches parametrische Verteilungsmodell eignet sich für X. Bestimmen sie mit den oben angegebenen Daten auch den/die Parameter dieser Verteilung. (2P)

Hier eignet sich eine Poisson-Verteilung. Der Mittelwerte der Anzahl Klimmzüge ist 6, damit ist $X \sim Pois(\lambda = 6)$.

c) Wie gross ist die relative Häufigkeit für die beobachteten Daten, dass ein Proband mehr als 1 Klimmzug schafft? Verwenden sie danach das parametrische Verteilungsmodell, um die W'keit zu bestimmen, dass ein Proband mehr als 2 Klimmzüge schafft. (3P) (2P)

Hinweis: $e^{-1} = 0.37$, $e^{-2} = 0.14$, $e^{-3} = 0.05$, $e^{-4} = 0.02$, $e^{-5} = 0.007$, $e^{-6} = 0.002$.

8 von 10 Personen haben mehr als 1 Klimmzug geschafft, somit beträgt die relative Häufigkeit 70%. Wir berechnen nun $P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. Es ist $P(X = 0) = e^{-6} = 0.002$ und $P(X = 1) = 6 \cdot e^{-6} = 0.012$. Somit $P(X > 1) = 0.986$.

Als zweite Disziplin des «Bierathlons» folgt der Weitwurf von einem 10kg schweren Steinbrocken. Die gemessenen Werte stehen hier nicht zur Verfügung. Es sei $Y =$ «erzielte Distanz».

d) Geben sie den Wertebereich der Zufallsvariable Y an. Entscheiden sie dann, ob sie zur Beschreibung von Y eine Normal-, eine Lognormal- oder eine Exponentialverteilung verwenden und begründen sie ihre Wahl (max. 2-3 Sätze). (2P)

Y kann nur positive Werte annehmen, d.h. $Y \in [0, \infty)$ (oder auch $Y \in (0, \infty)$). Zur Beschreibung der Zufallsvariable bietet sich in erster Linie eine Lognormal-Verteilung an. Hier passt der Wertebereich und die Rechtsschiefe der Verteilung passt in der Regel auch gut zu beobachteten Daten. Die Normalverteilung kommt wegen dem Wertebereich weniger in Frage, zudem ist eine symmetrische Verteilung meist weniger passend. Die Exponentialverteilung passt zwar vom Wertebereich her, allerdings ist die Dichte bei 0 am grössten, was in der Praxis wenig plausibel ist. (Zur Bewertung: Lognormal-Verteilung 1P, Normal 0.5P, Exponential 0.5P. Begründung maximal 1P, je nach Gutdünken).

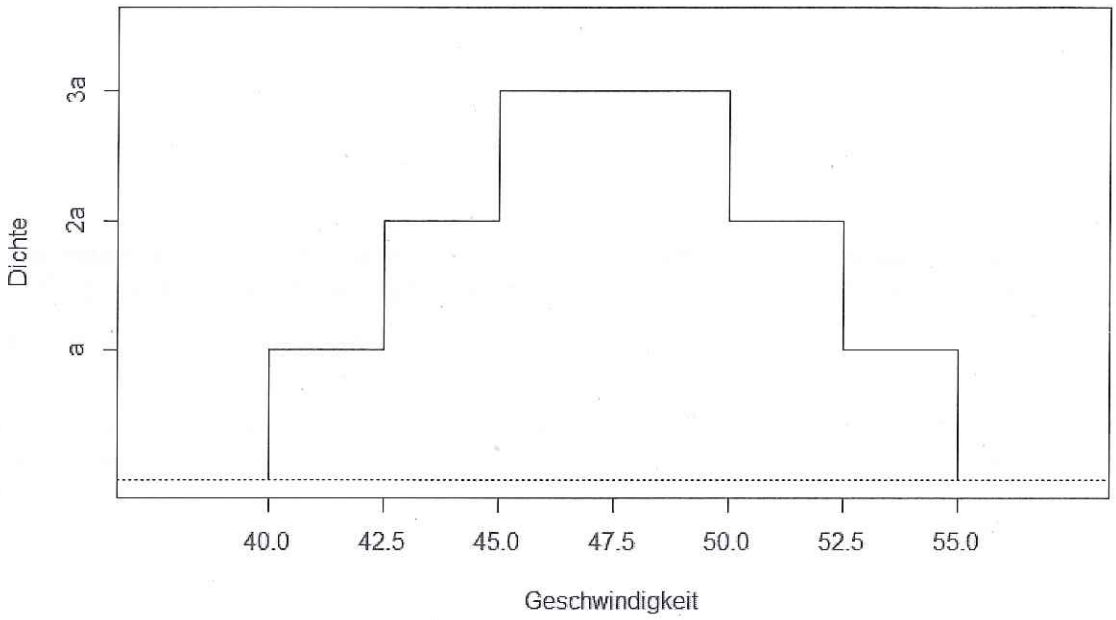
e) Beschreiben sie schliesslich, wie sie aus den Messwerten den/die Parameter der gewählten Verteilung bestimmen können. (1P)

Für die Lognormalverteilung: die gemessenen Werte werden logarithmiert, dann wird durch den Mittelwert der Daten μ und Stichproben-Varianz σ^2 bestimmt. Für die Normalverteilung: dasselbe (jedoch ohne logarithmieren der Daten) wie bei

der Lognormal-Verteilung. Für die Exponentialverteilung. hier wird die Rate λ gleich dem Kehrwert des Mittelwerts der Daten gesetzt.

Aufgabe 2

Bei einer Verkehrskontrolle wird die Geschwindigkeit von Fahrzeugen ermittelt. Es zeigt sich dabei die folgende Verteilung, d.h. Dichtefunktion.



Es sei $X =$ «Geschwindigkeit eines Fahrzeugs» die Zufallsvariable von Interesse. Beantworten sie nun die folgenden Fragen:

a) Bestimmen sie den Wert a im obigen Plot (inkl. Herleitung/Begründung). (2P) (1P)

Die Fläche unter der Dichtefunktion muss 1 ergeben. Sie ergibt sich als $30a$, somit ist $a = 1/30$.

b) Wie gross ist der Erwartungswert $E[X]$? (inkl. Herleitung/Begründung). (1P)

Aus Symmetriegründen (der Erwartungswert ist der Schwerpunkt der Dichtefunktion) gilt $E[X] = 47.5$.

c) Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 50)$ (inkl. Herleitung/Begründung). (2P)

Dazu müssen wir bestimmen, welcher Teil der Fläche unter der Dichtefunktion links vom Wert 50 liegt. Es handelt sich dabei um 9 Rechtecke à 2.5 Einheiten Breite und einer Höhe von a. Insgesamt gibt es 12 solcher Teilflächen, also beträgt die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 50) = 9/12 = 0.75$.

d) Skizzieren sie die kumulative Verteilungsfunktion von X. Die Skizze muss nicht massstäblich exakt sein, jedoch alle wesentlichen Elemente der kumulativen Verteilungsfunktion wiedergeben. Ebenso müssen zwingend korrekte Achsenbeschriftungen vorhanden sein. (3P)

Skizze folgt noch.