Prüfung Februar 2019
Lösung

Aufgabe 1 [8 Punkte]

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten den Vektor $c_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sowie die 3×3 Matrix $A_\alpha = c_\alpha \cdot c_\alpha^\top$.

(a) Geben Sie für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ den Rang von A_α an. [1 Punkt]
Hinweis: Es ist keine Rechnung notwendig.
Lösung: In den Spalten von $A_\alpha = c_\alpha \cdot c_\alpha^\top$ stehen Vielfache von $c_\alpha \in \mathbb{R}^3$, also kann der von den Spaltenvektoren von A_α erzeugte Unterraum von $\mathbb{R}^3$ höchstens die Dimension 1 haben. Da aber $c_\alpha \neq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}^3$, ist der Rang von A_α gerade 1. *[1 Punkt]*

Wir betrachten nun die lineare Abbildung $F_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$F_\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A_\alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Kerns der Abbildung F_α in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$. [2 Punkte]
Lösung: Wir berechnen A_α explizit:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \end{pmatrix}.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ ist damit $F_\alpha(x) = 0$ (d.h. $x \in \ker(F_\alpha)$), genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 \\ \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Wir lösen dieses Gleichungssystem durch Umformungen der augmentierten Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & 0 \\ \alpha^2 & \alpha^3 & \alpha^4 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

[1 Punkt]
Daraus liest man sofort die Lösung ab:

$$\ker(F_\alpha) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\},$$

also ist $\left\{ \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $\ker(F_\alpha)$

Bitte wenden!

[1/2 Punkt]

und $\ker(F_\alpha)$ hat demnach die Dimension 2. (Letzteres kann man auch sofort aus $\dim\ker(F_\alpha) + \dim \mathrm{Bild}(F_\alpha) = 3$ und Teil (a) schliessen).

[1/2 Punkt]

(c) Bestimmen Sie ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass gilt $A_\alpha^2 = \frac{7}{4} A_\alpha$. [3 Punkte]

Hinweis: Sie brauchen A_α^2 nicht explizit ausrechnen. Benutzen Sie stattdessen, dass gilt $A_\alpha^2 = (c_\alpha \cdot c_\alpha^\top)^2$.

Lösung:

Beachte, dass Matrizenmultiplikation assoziativ ist:

$$A_\alpha^2 = (c_\alpha c_\alpha^\top)(c_\alpha c_\alpha^\top) = c_\alpha \underbrace{(c_\alpha^\top \cdot c_\alpha)}_{\in\mathbb{R}} c_\alpha^\top$$

$$= (c_\alpha^\top \cdot c_\alpha) c_\alpha c_\alpha^\top = (c_\alpha^\top \cdot c_\alpha) A_\alpha \overset{!}{=} \tfrac{7}{4} A_\alpha$$

$$\Rightarrow \qquad (c_\alpha^\top \cdot c_\alpha - \tfrac{7}{4}) A_\alpha \overset{!}{=} 0,$$

$$\Rightarrow \qquad c_\alpha^\top \cdot c_\alpha - \tfrac{7}{4} \overset{!}{=} 0,$$

da $A_\alpha \neq 0$.

[1 Punkt]

Wir rechnen also $c_\alpha^\top \cdot c_\alpha$ aus:

$$c_\alpha^\top \cdot c_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = 1 + \alpha^2 + \alpha^4 \overset{!}{=} \tfrac{7}{4}$$

$$\Rightarrow \qquad z^2 + z - \tfrac{3}{4} = 0, \qquad \text{wobei } z := \alpha^2.$$

[1/2 Punkt]

Die Lösungen für z sind demnach

$$z_{1,2} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4}} = \begin{cases} \frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

[1 Punkt]

Nur die positive Lösung ist relevant, da wir nach einem reellen α suchen. Wir erhalten: $\alpha_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

[1/2 Punkt]

(d) Weisen Sie nach, dass c_α ein Eigenvektor von A_α ist und begründen Sie, dass die Matrix A_α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar ist. [2 Punkte]

Lösung:

Es folgt ähnlich wie in (c), dass

$$A_\alpha c_\alpha = (c_\alpha c_\alpha^\top) c_\alpha = c_\alpha (c_\alpha^\top c_\alpha) = (1 + \alpha^2 + \alpha^4) c_\alpha.$$

Da nun $c_\alpha \neq 0$, handelt es sich um einen Eigenvektor von A_α zum Eigenwert $1 + \alpha^2 + \alpha^4 \neq 0$.

[1 Punkt]

Aus (b) wissen wir bereits, dass 0 ein Eigenwert ist mit zwei linear unabhängigen Eigenvektoren (beachte, dass für $x \neq 0$: $A_\alpha x = 0 \cdot x$, genau dann, wenn $x \in \ker(F_\alpha)$). Also entspricht für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit der algebraischen Vielfachheit und somit ist A_α diagonalisierbar.

[1 Punkt]

Aufgabe 2 [8 Punkte]

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar ist. [3 Punkte]

Lösung:

Die Matrix hat eine Block-Diagonalgestalt. Daraus sehen wir:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a & 5 & 0 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & a^2 \\ 0 & a \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a(a^2 - 4a - 5) =: f(a). \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Bemerkung: Man kann auch alternativ die Matrix zunächst nach der ersten Zeile und anschliessend nach der zweiten Zeile entwickeln:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a & 5 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & a & 5 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ a & 5 & 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

Da eine Matrix genau dann nicht invertierbar ist, wenn ihre Determinante verschwindet,

[1 Punkt]

berechnen wir die Nullstellen des Polynoms f: Es gilt: $f(a) = 0$, falls

$$a = 0 \qquad \vee \qquad a^2 - 4a - 5 = 0 \; (\Rightarrow a = 2 \pm \sqrt{4+5}),$$

also ist die Matrix genau dann nicht invertierbar, wenn $a \in \{0, -1, 5\}$.

[1 Punkt]

(b) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: [5 Punkte]

(i) Die Menge $L = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 : x + y = z + 2\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

(ii) Ist A eine invertierbare $n \times n$-Matrix und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert, dann ist $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert von A^{-1}.

(iii) Ist A eine reelle 3×3-Matrix mit $A^\top = -A$, dann ist $\det(A) = 0$.

(iv) Ist A eine reelle $n \times n$-Matrix und $A^5 \cdot (A^\top)^2$ ist invertierbar, dann ist auch A invertierbar.

(v) Es gibt eine reelle, orthogonale 3×3-Matrix M mit den Eigenwerten $-1, 1$ und 3.
Hinweis: Betrachten Sie für einen Eigenvektor $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ von M die Länge von $M \cdot x$, also $\|M \cdot x\| = \sqrt{(M \cdot x)^\top (M \cdot x)}$.

Lösung:

(i) <u>Falsch</u>, da z.B. $(0, 0, 0)^\top \notin L$.
[1 Punkt]

Bitte wenden!

(ii) Richtig, denn falls für $v \neq 0$ gilt: $A \cdot v = \lambda v$, folgt durch Multiplikation mit A^{-1} und λ^{-1} sofort $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$.

Bemerkung: Da A invertierbar ist, ist $\det(A) \neq 0$, insbesondere folgt bereits, dass $\lambda \neq 0$, wenn λ ein Eigenwert ist.

[1 Punkt]

(iii) Richtig, denn

$$\begin{aligned} & \det(A) = \det(A^\top) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) \\ \Rightarrow \quad & 2\det(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir verwendet, dass für jede $n \times n$-Matrix C und eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\det(\alpha C) = \alpha^n \det(C)$.

[1 Punkt]

(iv) Richtig, denn wegen $\det(CD) = \det(C)\det(D)$ für beliebige $n \times n$-Matrizen C, D erhalten wir:

$$\det(A^5(A^\top)^2) = \det(A)^5 \det(A^\top)^2 = \det(A)^7.$$

Ist also die linke Seite ungleich null (was der Fall ist, falls $A^5 \cdot (A^\top)^2$ invertierbar ist), ist auch $\det(A) \neq 0$, also ist A invertierbar.

[1 Punkt]

(v) Falsch, denn sei x ein Eigenvektor (insbesondere ungleich 0) zum Eigenwert 3, dann gilt:

$$\|M \cdot x\| = \sqrt{(M \cdot x)^\top (M \cdot x)} = \sqrt{x^\top (M^\top M) \cdot x} = \sqrt{x^\top x} = \|x\|,$$

denn nach Definition ist $M^\top M = I_{3\times 3}$ (die Einheitsmatrix). Auf der anderen Seite gilt aber auch: $M \cdot x = 3x$, also

$$\|M \cdot x\| = \|3x\| = 3\|x\|.$$

Dies ist aber ein Widerspruch, denn $x \neq 0$, also ist auch $3\|x\| \neq \|x\|$.

[1 Punkt]

Siehe nächstes Blatt!

Aufgabe 3 [9 Punkte]

Wir betrachten eine Zufallsvariable X mit einer Dichte f gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ x, & \text{falls } 0 \leq x < 1, \\ e^{-c(x-1)}, & \text{falls } x \geq 1, \end{cases}$$

wobei $c > 0$ eine Konstante ist.

(a) Berechnen Sie den Wert von c. [2 Punkte]

Lösung: Damit f eine Dichte ist, muss gelten, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (dies ist erfüllt, sobald $c > 0$) und auf der anderen Seite: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

[1/2 Punkt]

Also:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x dx + \int_1^\infty e^{-c(x-1)} dx &\overset{!}{=} 1 \\ \Rightarrow \quad \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \int_0^z e^{-cz} dz &\overset{!}{=} 1 \qquad \text{(mit Subst.:) } z := x-1, \ \textit{[1/2 Punkt]} \\ \Rightarrow \quad \left[-\tfrac{1}{c}e^{-cx}\right]_0^\infty &\overset{!}{=} \tfrac{1}{2} \qquad \textit{[1/2 Punkt]}, \\ \Rightarrow \quad c &= 2. \qquad \textit{[1/2 Punkt]} \end{aligned}$$

(b) Berechnen Sie:

- die Verteilungsfunktion $F_X = P[X \leq \cdot]$ der Zufallsvariable X,
- die Wahrscheinlichkeiten $P[X = 4]$ und $P[X \geq 3]$,
- den Erwartungswert $E[X]$. [5 Punkte]

Lösung:

Wir berechnen die Verteilungsfunktion von X: Für $x < 0$ ist $F_X(x) = 0$. Weiterhin:

$$\begin{aligned} F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt &= \begin{cases} \int_0^x t dt, & \text{falls } x \in [0,1) \\ \int_0^1 t dt + \int_1^x e^{-2(x-1)}, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left[\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^x, & \text{falls } x \in [0,1) \\ \left[\tfrac{1}{2}t^2\right]_0^1 + \left[-\tfrac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]_1^x, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \tfrac{1}{2}x, & \text{falls } x \in [0,1) \\ 1 - \tfrac{1}{2}e^{-2(x-1)}, & \text{falls } x \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Da X eine stetige Zufallsvariable ist, gilt $P[X = 4] = 0$.

[1 Punkt]

Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} P[X \geq 3] = 1 - P[X < 3] &\overset{X \text{ stetig}}{=} 1 - P[X \leq 3] = 1 - F_X(3) \\ &= 1 - (1 - \tfrac{1}{2}e^{-2(3-1)}) = \tfrac{1}{2e^4}. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Nun berechnen wir noch den Erwartungswert:

Bitte wenden!

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\infty} x e^{-2(x-1)} dx \\
&= \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[-\tfrac{x}{2}e^{-2(x-1)}\right]_1^{\infty} + \int_1^{\infty} \tfrac{1}{2} e^{-2(x-1)} dx \\
&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\left[e^{-2(x-1)}\right]_1^{\infty} \\
&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{11}{12}.
\end{aligned}
$$

[2 Punkte]

(c) Wir betrachten nun einen Zylinder mit Höhe 3, dessen Radius zufällig und wie X verteilt ist. Das Volumen dieses Zylinders ist die Zufallsvariable V. Finden Sie die Verteilungsfunktion $F_V = P[V \leq \cdot]$ von V. [2 Punkte]

Lösung:

Das Volumen eines solchen Zylinders ist $V = 3 \cdot \pi \cdot X^2$. Offenbar ist $F_V(z) = 0$, falls $z < 0$. Für $z \geq 0$ gilt nun:

$$
\begin{aligned}
F_V(z) &= P[V \leq z] = P\left[3\pi X^2 \leq z\right] \\
&\overset{X\geq 0}{=} P\left[X \leq \sqrt{\tfrac{z}{3\pi}}\right] \qquad \textit{[1 Punkt]} \\
&= F_X\left(\sqrt{\tfrac{z}{3\pi}}\right) \\
&= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{z}{3\pi}}, & \text{falls } \sqrt{\tfrac{z}{3\pi}} \in [0,1) \\ 1 - \tfrac{1}{2}e^{-2(\sqrt{\tfrac{z}{3\pi}}-1)}, & \text{falls } \sqrt{\tfrac{z}{3\pi}} \geq 1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{z}{3\pi}}, & \text{falls } z \in [0,3\pi) \\ 1 - \tfrac{1}{2}e^{-2(\sqrt{\tfrac{z}{3\pi}}-1)}, & \text{falls } z \geq 3\pi. \end{cases} \qquad \textit{[1 Punkt]}
\end{aligned}
$$

Siehe nächstes Blatt!

Aufgabe 4 [5 Punkte]

Bei einer gesundheitswissenschaftlichen Untersuchung wird bei zwei Testgruppen A und B, beide der Grösse $n = 100$, jeweils die Cholesterinkonzentration im Blut gemessen. Es wird davon ausgegangen, dass die Cholesterinkonzentrationen im Blut der unterschiedlichen Personen (approximativ) normalverteilt und unabhängig voneinander sind. Es ergeben sich dabei die folgenden Werte in $\text{mmol} \cdot \text{l}^{-1}$

$$\widehat{\mu}_A = 6.5, \qquad \widehat{\sigma}_A = s_A = 2,$$
$$\widehat{\mu}_B = 4.5, \qquad \widehat{\sigma}_B = s_B = 1.$$

(a) Finden Sie je ein approximatives 95%-Vertrauensintervall für die Cholesterinkonzentration im Blut bei den beiden Gruppen A und B [1 Punkt]

Hinweis: Eventuell relevante Quantile der t-Verteilung: $qt_{0.95;99} = 1.66$, $qt_{0.975;99} = 1.98$.

Lösung: Die Vertrauensintervalle finden wir mithilfe des Quantils $qt_{0.975;99} = 1.98$ (zweiseitige Intervalle!)

$$\text{Gruppe A:} \quad \left[\widehat{\mu}_A - qt_{0.975;99}\frac{\widehat{\sigma}_A}{\sqrt{100}}, \widehat{\mu}_A - qt_{0.975;99}\frac{\widehat{\sigma}_A}{\sqrt{100}}\right] \simeq \left[6.5 - 2 \cdot \tfrac{2}{10}, 6.5 + 2 \cdot \tfrac{2}{10}\right]$$
$$= [6.1, 6.9], \qquad \textit{[1/2 Punkt]}$$

$$\text{Gruppe B:} \quad \left[\widehat{\mu}_A - qt_{0.975;99}\frac{\widehat{\sigma}_B}{\sqrt{100}}, \widehat{\mu}_B - qt_{0.975;99}\frac{\widehat{\sigma}_B}{\sqrt{100}}\right] \simeq \left[4.5 - 2 \cdot \tfrac{1}{10}, 4.5 + 2 \cdot \tfrac{1}{10}\right]$$
$$= [4.3, 4.7]. \qquad \textit{[1/2 Punkt]}$$

(b) Entscheiden Sie mit einem Ad-Hoc-Test, ob sich die mittleren Cholesterinkonzentrationen im Blut bei den Gruppen A und B signifikant voneinander unterscheiden. [1 Punkt]

Lösung:

Man sieht, dass sich die beiden 95%-Intervalle nicht überlappen. Dies deutet auf einen signifikanten Unterschied bei den mittleren Cholesterinkonzentrationen im Blut der beiden Testgruppen hin.

[1 Punkt]

Bei der Untersuchung wird eine Person bei zu hohem Cholesteringehalt im Blut als 'gefährdet' in Bezug auf bestimmte Krankheiten eingestuft.

(c) Angenommen, die Wahrscheinlichkeit für eine zufällig ausgewählte Person in Gruppe A, als 'gefährdet' zu gelten, sei $p_A = 0.5$ und innerhalb von Gruppe B sei diese Wahrscheinlichkeit $p_B = 0.4$. Schätzen Sie mithilfe des zentralen Grenzwertsatz die Wahrscheinlichkeit ab, dass mehr als die Hälfte aller 200 Testpersonen bei der Untersuchung als 'gefährdet' eingestuft werden. [3 Punkte]

Hinweis: Sind $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ unabhängig, so ist $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, also $\frac{X_1+X_2-(\mu_1+\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Auf der umliegenden Seite finden Sie die Werte für die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ einer Standardnormalverteilung.

Lösung: Wir definieren

$$U_i = \mathbb{1}\{\text{Person } i \text{ aus Gruppe } A \text{ gefährdet}\},$$
$$V_i = \mathbb{1}\{\text{Person } i \text{ aus Gruppe } B \text{ gefährdet}\},$$

wobei $i = 1, ..., n$ (in unserem Fall ist $n = 100$). Nach der Information sind die U_i i.i.d. Bernoulli-verteilt mit Parameter $p_A = 0.5$ und die V_i ebenso i.i.d. Bernoulli-verteilt mit Parameter $p_B = 0.4$. Der zentrale Grenzwertsatz sagt nun:

$$\frac{\sum_{i=1}^n U_i - nE[U_1]}{\sqrt{n}\text{Var}(U_1)} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1),$$
$$\frac{\sum_{i=1}^n V_i - nE[V_1]}{\sqrt{n}\text{Var}(V_1)} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

[1 Punkt]

Setzen wir $Z_A := \sum_{i=1}^{100} U_i$ und $Z_B := \sum_{i=1}^{100} V_i$, dann gilt also näherungsweise:

$$Z_A \sim \mathcal{N}(100E[U_1], 100\text{Var}(U_1)) = \mathcal{N}(50, 25),$$
$$Z_B \sim \mathcal{N}(100E[V_1], 100\text{Var}(V_1)) = \mathcal{N}(40, 24).$$

Bitte wenden!

[1/2 Punkt]

Hierbei haben wir verwendet, dass für eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable U_1 (also eine Zufallsvariable mit $P[U_1 = 1] = p_A = 1 - P[U_1 = 0]$) gilt:

$$E[U_1] = p_A, \qquad \mathrm{Var}(U_1) = p_A(1 - p_A),$$

analog für V_1.

Mit dem Hinweis erhält man nun (näherungsweise):

$$Z := Z_A + Z_B \sim \mathcal{N}(90, 49) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Z - 90}{7} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

[1/2 Punkt]

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} P[Z > 100] &= 1 - P[Z \leq 100] = 1 - P\left[\frac{Z-90}{7} \leq \frac{100-90}{7}\right] \\ &\simeq 1 - \Phi\left(\frac{10}{7}\right) \simeq 1 - \Phi(1.43) \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 1 - 0.924 = 7.6\%. \end{aligned}$$

[1 Punkt]