

Prüfung Grundlagen der Mathematik II

AUFGABE 1 [5 Punkte]

Jede Teilaufgabe ist ein Punkt Wert.

(A) Schreiben Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ als reelle Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(B) Ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Element der Bildmenge der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? Antworten Sie mit Begründung.

(C) Was ist die Dimension des Kerns der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$? Antworten Sie mit Begründung.

(D) Betrachten Sie folgende Untervektorräume von \mathbb{R}^3 :

$$U = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad V = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\dim(U \cap V)$ mit Begründung.

(E) Finden Sie einen Vektor $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, der orthogonal zu allen Vektoren im Untervektorraum

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

von \mathbb{R}^3 ist.

AUFGABE 2 [3 Punkte]

Jede Teilaufgabe ist ein Punkt Wert.

(A) Sei $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante der fünften Potenz M^5 von M .

(B) Finden sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ damit 3 ein Eigenwert der Matrix $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist.

(C) Bestimmen Sie einen Eigenvektor in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ zum Eigenwert 5.

BITTE WENDEN !

AUFGABE 3: [4 Punkte]

Im zweiten Weltkrieg wurde London stark bombardiert. Um die Treffer zu erheben, wurde die Stadt in 576 kleine Gebiete von je einem Viertel Quadratkilometer aufgeteilt. Die Anzahl Treffer über einen bestimmten Zeitraum in jedem Gebiet wurde gezählt und ist in der folgenden Tabelle zusammengefasst. Es gab insgesamt 537 Treffer.

Treffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8+
Gebiete	229	211	93	35	7	0	0	1	0

Wir interessieren uns für die Zufallsvariablen $X_i = \text{“Anzahl Treffer im Teilgebiet } i \text{”}$.

- (a) [1 Punkt] Welche Gründe sprechen hier gegen die Verwendung einer Binomial-Verteilung für die Zufallsvariablen?
- (b) [1 Punkt] Gehen Sie davon aus, dass die Zufallsvariablen X_i identisch verteilt sind. Sie sollen nun eine geeignete Poisson-Verteilung für die Zufallsvariablen X_i anpassen. Geben Sie den geschätzten Parameter $\hat{\lambda}$ der Verteilung an, ebenso wie auch den Erwartungswert und die Standardabweichung der so entstehenden Verteilung für X_i . Geben sie die Resultate als Brüche und nicht als Dezimalzahlen an.
- (c) [2 Punkte] Gehen sie an dieser Stelle davon aus, dass die Verteilung von X_i bzw. deren Parameter λ so ist, dass $\lambda = 0.9$ und $\exp(-\lambda) = 0.4$. Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Gebiet mehr als 2 Treffer erhält.

AUFGABE 4: [4 Punkte]

Nehmen wir an, dass für Laufbänder und Hometrainer in den letzten 6 Monaten die folgende Anzahl Ausrüstungsverkäufe und Serviceverträge zustande kamen:

	Laufband	Hometrainer
Total Verkäufe	144	100
Mit Servicevertrag	48	50

Ein Servicevertrag kann nur zustande kommen, wenn auch Ausrüstung verkauft wurde. Folglich wurden z.B. 96 Laufbänder ohne Servicevertrag verkauft.

- (a) [2 Punkte] Schätzen sie den Anteil der Verkäufe mit Servicevertrag sowohl für Laufbänder als auch für Hometrainer und geben sie jeweils das entsprechende 95%-Vertrauensintervall mit Hilfe der Faustregel an.
Zahlenhinweis: Benutzen die Näherungen $\frac{\sqrt{2}}{36} \approx 0.04$. Rechnen Sie mit 2 anstelle von 1.96. Genauigkeit wird auf 2 Stellen nach dem Komma gesetzt.
- (b) [2 Punkte] Sind die beiden Anteile von Verkäufen mit Servicevertrag für Laufbänder und Hometrainer signifikant unterschiedlich? Beantworten sie die folgenden Fragen:
- wie lautet die Nullhypothese für den Test, den man hier durchführen soll?
 - führen sie einen Ad-Hoc-Test mit dem Resultat aus (a) durch und beantworten sie, ob es einen signifikanten Unterschied gibt.
 - Argumentieren sie, ob und warum die Faustregel hier ein genügend genaues Resultat für das Vertrauensintervall liefert.
 - Was bedeutet ein p-Wert von 0.005 bei diesem Beispiel (max. 2 Sätze)?