

Prüfung Grundlagen der Mathematik II
14. August 2017

AUFGABE 1 (8 Punkte)

Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ und $b_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha^2 + \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$, fr $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) (2 Punkte) Bringen Sie die augmentierte Matrix (A, b) auf Zeilenstufenform.

(b) (2 Punkte) Wie viele Lösungen gibt es in Abhängigkeit von α? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Dimension des Lösungsraums von $Ax = 0$.

(d) (2 Punkte) Sei nun $\alpha = 0$. Berechnen Sie die Lösungsmenge von $Ax = b_0$ und drücken Sie diese durch Orts- und Richtungsvektoren aus.

(e) (1 Punkt) Ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ ein Vektorraum ?

AUFGABE 2 (7 Punkte)

Gegeben sei die Matrix $M = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$, wobei $\phi \in (0, 2\pi]$ und $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Determinante von M in Abhängigkeit von ϕ, a, b.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie MM^T. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist M eine orthogonale Matrix?

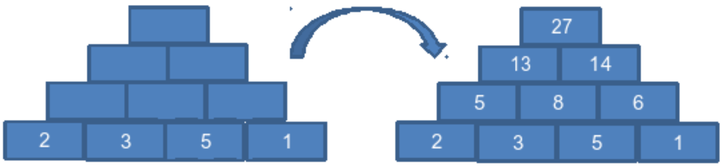
(c) (3 Punkte) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ ist eine Drehmatrix. Für welche ϕ hat M *reelle* Eigenwerte und wie lauten diese?

(d) (1 Punkt) Sei $a = 2, b = 0, \phi = \pi$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von M.

— **BITTE WENDEN** —

AUFGABE 3 (8 Punkte)

Die Kinder des Dozenten vergnügen sich gerne mit Zahlenmauern. Vorgegeben ist dabei die unterste Zeile, die oberen müssen durch Addieren der jeweils darunterliegenden Felder berechnet werden. Anbei ein Beispiel:



Nun stellt sich natürlich die interessante Frage, welche Zahl am Schluss zuoberst steht. Sie sollen in dieser Aufgabe diesen Sachverhalt mittels Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeiten beantworten. Wir gehen dazu davon aus, dass in den vier Feldern der untersten Zeile die Zufallsvariablen X_1, X_2, X_3, X_4 stehen. Im Feld an der Spitze der Zahlenmauer steht die Zufallsvariable Z.

Wir nehmen an, dass die Kinder die Felder in der untersten Zeile ausschliesslich mit den Ziffern 1-9 füllen. Die Ziffern 1-3 kommen dabei mit 3-facher Häufigkeit vor, die Ziffern 4-6 mit doppelter Häufigkeit und die Ziffern 7-9 mit 1-facher Häufigkeit.

(a) (1 Punkt) Stellen sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung (bzw. die diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion) der Zufallsvariablen $X_i, i = 1, \ldots, 4$ grafisch dar. Es darf sich dabei um eine Skizze handeln, achten sie jedoch auf eine massstäbliche Abbildung und beschriften sie die Achsen vollständig und korrekt.

(b) (2 Punkte) Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeiten

$$P(X_i > 1), P(X_i = 5), P(7 \leq X_i \leq 8)$$

(c) (2 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert $E[X_i]$.

(d) (1 Punkt) Drücken Sie nun die Zufallsvariable Z durch X_1, X_2, X_3, X_4 aus und geben sie den Wertebereich (bzw. den Wahrscheinlichkeitsraum Ω) von Z an.

(e) (1 Punkt) Berechnen Sie den Erwartungswert von Z. Hinweis: falls sie die Teilaufgabe c) nicht lösen konnten, verwenden sie $E[X_i] = 5$. Falls sie bei c) die Lösung gefunden haben, dürfen sie auch mit dem richtigen Wert weiterrechnen.

(f) (1 Punkt) Wie sieht die Wahrscheinlichkeitsverteilung (bzw. die diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion) von Z aus, insbesondere wenn noch breitere Zahlenmauern gebaut werden?

— BITTE WENDEN —

AUFGABE 4 (7 Punkte)

Das Schweizer Bundesamt für Lebensmittelsicherheit setzt sich dafür ein, dass der Zuckergehalt in Frühstückscerealien reduziert wird. Dafür wurde sowohl im Jahr 2015 wie auch im Jahr 2016 die Menge an Zucker bei einer Stichprobe von 9 Müesli bestimmt. Die Kenngrössen der Stichproben sind dabei wie folgt:

$$\begin{array}{llll} 2015: & n_{2015} = 9, & \hat{\mu}_{2015} = 15g, & \hat{\sigma}_{2015} = s_{2015} = 2.1g \\ 2016: & n_{2016} = 9, & \hat{\mu}_{2016} = 13.5g, & \hat{\sigma}_{2016} = s_{2016} = 1.5g \end{array}$$

Lösen sie mit diesen Angaben die folgenden Aufgaben:

(a) (1 Punkt) Geben sie je ein approximatives 95 %-Vertrauensintervall für den erwarteten Zuckergehalt in den Frühstückscerealien für das Jahr 2015 und das Jahr 2016 an.

(b) Um der Frage nachzugehen, ob sich der Zuckergehalt signifikant verändert hat, sollen sie einen 2-Stichproben-t-Test durchführen. Beantworten sie die folgenden Fragen:

   (i) (1 Punkt) Wie lautet die Nullhypothese für diesen Test?

   (ii) (1 Punkt) Welcher konkreten Verteilung folgt die übliche Teststatistik für den 2-Stichproben-t-Test?

   (iii) (1 Punkt) Geben sie (ungefähr, d.h. so genau wie mit den zur Verfügung stehenden Mitteln möglich) den Verwerfungsbereich des Tests an.

   (iv) (2 Punkt) Berechnen sie den Wert der Teststatistik. Hinweis: für S_p ergibt sich ein Wert von 1.8. Sie dürfen beim Resultat Brüche und Wurzeln stehen lassen, wenn ein weiteres Vereinfachen nicht mehr möglich ist. Wird die Nullhypothese verworfen?

   (v) (1 Punkt) Ist der p-Wert für diesen Test kleiner als 0.05? Antworten sie mit ja/nein und geben sie eine Begründung an.