

Dr. M. Dettling

## Grundlagen der Mathematik II – Lösung D-CHAB

---

Name:

Legi-Nr.:

Studiengang:

---

**Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.**

- Prüfungsdauer: 90 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Beliebige schriftliche Hilfsmittel, Wörterbücher. Keine Taschenrechner.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Lassen Sie auf jedem Blatt einen Rand für die Korrektur. **Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrem Namen.**
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- Sämtliche Antworten müssen begründet werden. Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.
- Maximalpunktzahl: 30 Punkte.

**Bitte leer lassen!**

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
Total		
Vollständigkeit		
Note		

**AUFGABE 1 (7 Punkte)**

Für  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sei die Matrix  $A_\alpha$  gegeben durch

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A_\alpha$  in Abhängigkeit von  $\alpha$ .
- Berechnen Sie  $\det A_\alpha$  und vergleichen Sie die Determinante mit dem Produkt der Eigenwerte (inkl. Vielfachheiten).
- Bestimmen Sie den Rang von  $A_\alpha$  in Abhängigkeit von  $\alpha$ .
- Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix  $A_{-2}$  (d.h.  $\alpha = -2$ ).
- Hat die Matrix  $A_{-2}$  eine Eigenbasis?

**AUFGABE 2 (10 Punkte)**

Sei  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $b_\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ \beta \end{pmatrix}$ .

- Wieviele Lösungen hat das Gleichungssystem  $Ax = 0$ ? Bestimmen Sie die Dimension der Lösungsmenge.
- Für welche Werte von  $\beta$  hat das System  $Ax = b$  mindestens eine Lösung?
- Für  $\beta = 4$ , berechnen Sie die Menge  $M$  aller optimalen Näherungslösungen für das System  $Ax = b_4$ . Ist  $M$  ein Vektorraum?
- Wählen Sie eine beliebige Näherungslösung  $x_0 \in M$ . Zeigen Sie, dass  $Ax_0 - b_4$  orthogonal zu allen Vektoren im  $\text{Bild}(A)$  ist, und berechnen Sie den Fehler  $|Ax_0 - b_4|$ .
- Seien  $x_0$  und  $x_1$  in  $M$ . Bestimmen Sie  $A(x_0 - x_1)$ .

— BITTE WENDEN —

### AUFGABE 3 (8 Punkte)

Die Zufallsvariable  $X$  beschreibt, wie oft Thomas an einem Tag seinen Instagram-Feed checkt. Es ist bekannt, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von:

- 30% 0 Zugriffe hat,
- 25% 2 Zugriffe hat,
- 25% 4 Zugriffe hat,
- 10% 5 Zugriffe hat,
- 10% 10 Zugriffe hat.

Lösen Sie mit diesen Angaben nun die folgenden Aufgaben.

- (a) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung (bzw. die diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion) der Zufallsvariablen grafisch dar. Es darf sich dabei um eine Skizze handeln, achten Sie jedoch auf eine massstäbliche Abbildung und beschriften Sie die Achsen vollständig und korrekt/
- (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten  $P(X = 1)$ ,  $P(X \geq 5)$  und  $P(X \in \{0, 4, 8\})$ .
- (c) Berechnen Sie Erwartungswert  $E[X]$  und Varianz  $Var(X)$ .

Wir betrachten nun die Zufallsvariable  $Z$ . Diese drückt aus, wie oft Thomas seinen Instagram-Feed während einem ganzen Jahr (d.h. 365 Tagen) checkt.

*Hinweis.* wir gehen davon aus, dass die Zugriffe an den verschiedenen Tagen stochastisch unabhängig sind.

- (d) Geben Sie den kleinsten und den grössten Wert aus dem Wertebereich (bzw. den Wahrscheinlichkeitsraum) von  $Z$  an.
- (e) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von  $Z$ .  
*Hinweis.* Falls Sie die Teilaufgabe (c) nicht lösen konnten, verwenden Sie  $E[X] = 4$  und  $Var(X) = 8$ . Falls Sie bei (c) die Lösungen gefunden haben, dürfen Sie auch mit den richtigen Werten weiterrechnen.
- (f) Geben Sie an, ob die Wahrscheinlichkeit, dass Thomas im Laufe eines Jahres mehr als 1150 Zugriffe macht, eher bei 16%, 2.5% oder 0.15% liegt. Geben Sie eine quantitative Begründung für ihre Antwort an.  
*Hinweis.*  $\sqrt{3000} \approx 55$ .

— BITTE WENDEN —

**AUFGABE 4 (5 Punkte)**

Bei zwei verschiedenen Mineralöl-Unternehmen  $A$  und  $B$  wurde der Anteil an Bioethanol im Treibstoff untersucht. Beim einen Unternehmen wurden 25 Proben genommen, beim anderen 16. Es geht darum festzustellen, ob es zwischen den beiden Unternehmen signifikante Unterschiede im Bioethanol-Anteil gibt. Die Kenngrößen sind wie folgt.

$$A : n_A = 25, \hat{\mu}_A = 3\%, \hat{\sigma}_A = s_A = 0.5\%;$$

$$B : n_B = 16, \hat{\mu}_B = 5\%, \hat{\sigma}_B = s_B = 1.0\%.$$

Lösen Sie mit diesen Angaben die folgenden Aufgaben.

- (a) Welche Aussage ist zutreffend, wenn die Anzahl Proben beim Unternehmen  $A$  auf 36 erhöht wird: "der Vergleich der beiden Unternehmen ist genauer bzw. aussagekräftiger, weil mehr Beobachtungen vorliegen" oder "der Vergleich der beiden Unternehmen ist schlechter bzw. weniger aussagekräftig, weil der Unterschied in der Anzahl Messungen noch grösser ist"? Entscheiden Sie sich für eine der beiden Aussagen und antworten Sie mit kurzer Begründung (max. 1-2 Sätze).
- (b) Geben Sie für  $A$  und  $B$  je ein approximatives 95%-Vertrauensintervall für den erwarteten Bioethanolgehalt an. Lässt sich bereits eine Aussage machen, ob zwischen den beiden Firmen ein signifikanter Unterschied beim Bioethanolgehalt besteht?
- (c) Wir gehen davon aus, dass in obigem Setup ein 2-Stichproben- $t$ -Test ausgeführt wird. Beantworten Sie die folgenden Aussagen mit richtig oder falsch:
  - (i) der Wert der Teststatistik liegt im Annahmebereich.
  - (ii) der  $p$ -Wert ist kleiner als 0.05.
  - (iii) werden  $n_A$  und  $n_B$  grösser (Rest bleibt gleich), so wird der  $p$ -Wert grösser.